श्रीधराचार्यविरचिता

त्रिशतिका

इत्यपराभिधानः

पाटी-गणित-सारः

प्रधान सम्पादक

प्रो० वी० कुटुम्बशास्त्री

कुलपति

राष्ट्रिय संस्कृत संस्थान मानितविश्वविद्यालय

'सुक्षेमा'-अनुवाद तथा अनुशीलनकार

डा० सुद्युम्न आचार्य

व्याकरणाचार्य, M.A. (अष्ट-स्वर्णपदक-विजेता) D.Phil.

राष्ट्रिय संस्कृत संस्थान

(मानित विश्वविद्यालय)

नई दिल्ली

प्ररोचना

प्राचीन भारत के प्रख्यात गणितज्ञ श्रीधराचार्य द्वारा विरचित अङ्कगणित की पुस्तक पाटीगणित सार के प्रस्तुत संस्करण को विद्वानों विशेषतः आधुनिक शैली में गणित एवं वाणिज्य के विद्यार्थियों के प्रति समर्पित करते हुए मुझे हार्दिक प्रसन्नता है। प्राचीन भारतीय विद्वानों की यह विशेषता रही है कि वे पूर्णतः निस्पृह भाव से बिना अपना विशेष परिचय दिए अपनें चिन्तन, उपलब्धियों एवं ग्रन्थों को सम्पूर्ण विश्व के उपकारार्थ समर्पित कर देते थे। फलतः आधुनिक इतिहास की शैली में ठीक-ठीक समय परिचय आदि जानने में बहिरङ्ग प्रमाणों का सहयोग लेना पड़ता है। श्रीधराचार्य के सम्बन्ध में भी ऐसा ही है। प्रसिद्ध ज्योतिर्विद शङ्करबालकृष्णदीक्षित ने इनके स्थितिकाल का सम्यक् विवेचन किया एवं ईसवीय आठवीं शताब्दी का उत्तरार्ध (750) ई० स्थिर किया। इस प्रकार लगभग 1200 वर्ष पूर्व विरचित इस ग्रन्थ की सम्पूर्ण भारत में सभी गणितज्ञों में प्रतिष्ठा रही है। इस महनीय एवं कालजयी ग्रन्थ के वर्तमान संस्करण को इस प्रकार तैयार किया गया है जिससे गणित एवं वाणिज्य के विद्यार्थियों को गणित की भारतीय शैली का सम्यक् परिचय प्राप्त हो कि हमारे पूर्वजों ने कितना गम्भीर कार्य अङ्कगणित के क्षेत्र में किया है साथ ही उन्हें प्रचलित गणितीय शैली में समझने में सहायता भी प्राप्त हो।

इस संस्करण के सम्पादक अनुवादक एवं व्याख्याकार डॉ० सुद्युम्न आचार्य ने परिश्रम पूर्वक गणितीय सूत्रों को हल करते हुए ग्रन्थ को न केवल सुखबोध्य बनाया है अपितु एक संतुलित एवं अनुसन्धान पूर्ण भूमिका द्वारा ग्रन्थ एवं ग्रन्थकार का परिचय भी निबद्ध किया है। मैं डॉ० सुद्युम्न आचार्य को साधुवाद देता हूँ।

इस ग्रन्थ की सुन्दर एवं शीघ्र प्रस्तुति के लिए शोध एवं प्रकाशन विभाग के संचालक डॉ० प्रकाश पाण्डेय एवं अपेक्षित रीति से मुद्रण करने के लिए अमर प्रिंटिंग प्रैस का वर्धापन करता हूँ।

पाठकों से यह अपेक्षा करता हूँ कि वे अपनी प्रतिक्रिया से संस्थान को अवगत कराएँगे जिससे इस प्रकार के गम्भीर कार्यों की योजनाएँ बनाने में सुविधा हो तथा विद्वानों को सामग्री उपलब्ध कराने में सहायता प्राप्त हो।

वैशाख शुक्ला पंचमी
आदि शंकरावतादिवस
वैक्रम 2060,
दि० 24 अप्रैल, 2004

संस्कृत सेवक
वेम्पटि कुटुम्बशास्त्री

भूमिका

प्राचीन भारतीय गणित के आकाश में श्रीधराचार्य एक ज्योतिष्मान् नक्षत्र की भाँति हैं। इन्होंने गणित-शास्त्र की समृद्धि के लिये प्रथम 'पाटी-गणित' नामक बृहत् ग्रन्थ की रचना की। तदनन्तर इसकी विषय-वस्तु का संक्षेप करते हुए 'पाटीगणित-सार' अथवा 'त्रिशतिका' का प्रणयन किया। यह तथ्य त्रिशतिका के प्रथम श्लोक से स्पष्ट है, जिसमें उन्होंने कहा है कि वे स्वविरचित पाटी-गणित से विषय-वस्तु को लेकर इसके 'सार' की रचना कर रहे हैं।

त्रिशतिका का हस्तलेख अत्यन्त जर्जर, सर्वथा दुरूह तथा भ्रष्ट पाठ की दशा में म. म. पं. सुधाकर द्विवेदी को प्राप्त हुआ था। इसकी दुरूहता का अनुमान करने के लिये पृ. 124 में इसके एक पत्रा की छायाप्रति संलग्न की गई है। उन्होंने अत्यन्त परिश्रम से इस ग्रन्थ का पुनर्लेखन तथा अपनी टिप्पणी आदि से सुसज्जित करते हुए वर्ष 1899 ई. में इसे प्रकाशित किया। उन्हें बृहत् ग्रन्थ पाटी-गणित का हस्तलेख प्राप्त नहीं हुआ था।

यह अत्यन्त सौभाग्य का विषय है कि आगे चलकर जम्मू के रघुनाथ मन्दिर पुस्तकालय से इस बृहत् ग्रन्थ का हस्तलेख भी प्राप्त कर लिया गया। इसे डा. कृपाशंकर शुक्ल ने वर्ष 1959 ई. में लखनऊ विश्वविद्यालय द्वारा अज्ञातकर्तृक संस्कृत व्याख्या तथा स्वविरचित इंग्लिश अनुवाद के साथ सुसज्जित करते हुए प्रकाशित किया। उन्होंने अपनी विस्तृत इंग्लिश भूमिका में ग्रन्थ के विविध पक्षों पर विस्तार से प्रकाश डाला।

त्रिशतिका का महत्त्व– इसमें कोई सन्देह नहीं कि भारत में ये दोनों ग्रन्थ सहस्रों वर्षो से पढ़े जाते रहे हैं। फिर भी त्रिशतिका के संक्षिप्त तथा अधिक सार-गर्भित होने से इसका प्रचार कुछ अधिक ही था। इसीलिये इसके हस्तलेख भारत के अनेक पुस्तकालयों में उपलब्ध होते हैं। जबकि 'पाटी-गणित' कम प्रचलित होने से उपरिलिखित एक ही पुस्तकालय में उपलब्ध हुआ है।

त्रिशतिका पर व्याख्याएँ भी अधिक संख्या में लिखी गई थी। इनमें दो व्याख्याएँ सस्कृत में तथा अन्य तेलगू, कन्नड एवं गुजराती भाषा में परिज्ञात हुई हैं।

इसकी गुजराती व्याख्या में श्रीधराचार्य के महत्त्व को प्रकट करने वाला एक सुन्दर श्लोक इस प्रकार है–

उत्तरतो सुरनिलयं दक्षिणतो मलयपर्वतं यावत्।
प्रागपरोदधिमध्ये नो गणकः श्रीधरादन्यः।।

अर्थात् उत्तर में हिमालय पर्वत से लेकर दक्षिण में मलय पर्वत तक तथा पूर्व तथा पश्चिम समुद्र के बीच श्रीधर से बड़ा कोई दूसरा गणितज्ञ नहीं है।

यह अकेला श्लोक श्रीधराचार्य के प्रचार तथा प्रभाव को आमलय, आहिमालय सम्पूर्ण भारत में प्रकट करने के लिए पर्याप्त है।

पाटी-गणित के बृहत्काय होने से उसमें स्वभावतः त्रिशतिका के श्लोकों के अलावा अन्य अनेक सूत्रों तथा अतिरिक्त उदाहरणों का वर्णन है। फिर भी इससे 'त्रिशतिका' का अपना महत्त्व कम नहीं होता। क्योंकि इसमें कुछ ऐसे विषयों का निरूपण है, जो पाटी-गणित में उपलब्ध नहीं होते। उदाहरणतः, वृत्त-खण्ड का क्षेत्रफल, गोले का आयतन, शंकु का आयतन आदि रेखा-गणित के अनेक सूत्र इसमें ही उपलब्ध हैं, पाटी-गणित में नहीं। साथ ही त्रिशतिका उदा. 26, 27, 28 जैसे बहुत से उदाहरण भी केवल इसमें ही प्राप्त होते हैं। ये उदाहरण बहुत लोकप्रिय हुए हैं। आगे चलकर अनेक गणितज्ञों ने इन्हें उद्धृत किया है।

त्रिशतिका में ऐसे सूत्र भी उपलब्ध हैं, जो पाटी-गणित से अन्य शब्दों में प्रस्तुत किये गए हैं। प्रस्तुत व्याख्या में ऐसे सूत्रों को तुलना के लिये टिप्पणी में उद्धृत कर दिया गया है।

त्रिशतिका की प्रस्तुत संस्कृत व्याख्या का भी विषय के निरूपण तथा तुलना के लिये अपना अलग महत्त्व है।

ग्रन्थ का नामकरण–प्रस्तुत ग्रन्थ का नाम 'त्रिशतिका' है। इसका शाब्दिक अर्थ 'तीन सौ श्लोकों का समाहार' यह होता है। पर प्रस्तुत ग्रन्थ में इतने श्लोक नहीं है। अतः एक सम्भावना यह बनती है कि इसके कतिपय श्लोक विलुप्त हो गए हैं।

इस ग्रन्थ के अन्त में 'त्रिशतिका-पाटी' का समाप्त होना कहा गया है। बहुत समय से अंक गणित को पाटी गणित कहा जाता रहा है। पाटी अर्थात् तख्ती पर धूल या अबीर बिछा कर गणित करने की परम्परा रही है। इसीलिये इसे 'धूलि-कर्म' भी कहा जाता रहा है। इन दोनों शब्दों का सर्वप्रथम प्रयोग ब्राह्मस्फुट सिद्धान्त में तथा पश्चात् लीलावती, सिद्धान्त-शिरोमणि वासना-भाष्य में भी प्राप्त है। गणित करने की यही पद्धति अरब तथा अन्य देशों में प्रसारित हुई। अतः वहाँ

धूलि-कर्म के लिये 'हिसाब-अल्-गुबार' तथा अंकों के लिये 'हरूफ अल् गुबार' शब्द प्रचलित हुए। यूरोप में भी किसी समय गिनती के लिये छोटे छोटे लट्टू वाली पाटी का प्रचलन था। इसे इंग्लिश में abacus कहा जाता था। यह शब्द हिब्रू के धूल अर्थ वाले abak से तथा पाटी अर्थ वाले ग्रीक शब्द abakos से विकसित हुए थे[१]।

शब्द बताते हैं कि भारत तथा शेष विश्व के विद्वानों ने कितनी कठिनाइयों के बीच गणित जैसे शास्त्र का विकास किया था। आधुनिक युग के प्रारम्भ तक भी असीम विपन्नताओं के मध्य इन विद्वानों ने इन शास्त्रों के विकास का क्रम जारी रखा था। हींज हैबर द्वारा लिखित 'तारे, मनुष्य और परमाणु' पृ. 73 के अनुसार–*''कैपलर और न्यूटन ने तो प्रकृति के इन नियमों को चिड़ियों के परों से लिखा था वह भी मोमबत्तियों की रोशनी में। फिर भी इन्हीं के साथ आधुनिक युग का आरम्भ हुआ था!!''*

लेखक का परिचय तथा काल– यह खेद का विषय है कि गणित के इस विश्रुत लेखक के विषय में हमें अत्यन्त स्वल्प जानकारी प्राप्त है। लेखक ने स्वयं अपने माता-पिता, जन्म-स्थान आदि के विषय में कुछ नहीं लिखा है। त्रिशतिका के प्रथम श्लोक से केवल इतना ज्ञात होता है कि वे शैव थे। क्योंकि उन्होंने शिव को प्रणाम किया है। पाटी-गणित के प्रारम्भ में भी उन्होंने सृष्टि, स्थिति, संहार के कारण अजन्मा ईश्वर को नमस्कार निवेदित किया है। परवर्ती लेखकों ने भी श्रीधराचार्य के जीवन-वृत्त के विषय में कोई प्रकाश नहीं डाला है।

इनके काल के विषय में भी अनेक मतभेद हैं। पं. सुधाकर द्विवेदी का मानना है कि प्रशस्तपादभाष्य के प्रख्यात 'कन्दली' व्याख्याकार श्रीधराचार्य तथा प्रस्तुत ग्रन्थ के प्रणेता आचार्य एक ही हैं। कन्दली व्याख्या की रचना उसके अन्तिम श्लोक के अनुसार 913 शकाब्द में की गई थी। इस प्रकार इसका रचना काल 991 ई. है।

विश्रुत इतिहासकार डा. ए. बी. कीथ ने बिना किसी परीक्षा या प्रमाण का उल्लेख करते हुए यह काल स्वीकार कर लिया है[२]। डा. ब्रजमोहन आदि विद्वान् भी इस मत के समर्थक हैं[३]।

---

१. देखें Oxford English Dictionary में 'abacus' शब्द

२. History of Sanskrit literature - Dr. A.B.Keith - हिन्दी भाषान्तर पृ. 663.

३. गणित का इतिहास - डा. ब्रजमोहन पृ. 92.

पर अन्य अनेक विद्वानों ने इस मत को स्वीकार नहीं किया है। सर्वप्रथम श्री शंकर बालकृष्ण दीक्षित ने सिद्ध किया है कि महावीराचार्य ने गणित सार-संग्रह में श्रीधर के 'मिश्रक-व्यवहार' से कुछ वाक्य या नियम प्राप्त किये हैं। इस प्रकार श्रीधर महावीर से पूर्ववर्ती सिद्ध होते हैं[१]। आगे चलकर डा. दत्त और सिंह आदि अनेक विद्वानों ने इस मत का समर्थन करते हुए श्रीधराचार्य को 672 शक या 750 ई. का सिद्ध किया है[२]। डा. गोरख प्रसाद, डा. सबलसिंह आदि ने भी इनका यही स्थिति-काल स्वीकार किया है[३]।

विद्वानों का यह मत युक्तिसंगत प्रतीत होता है। न्याय-कन्दली में व्याख्याकार ने कुछ स्वरचित ग्रन्थों के नाम बताए हैं। जैसे अद्वय-सिद्धि, तत्त्व-प्रबोध, तत्त्व-संवादिनी तथा संग्रह-टीका[४]। ये सभी दर्शन-ग्रन्थ हैं। इसमें उनके किसी गणित के ग्रन्थ का उल्लेख नहीं है।

इसके साथ ही यह भी एक तथ्य है कि न्याय-कन्दली के वे विवेचन जहाँ गणितीय सिद्धान्तों का उल्लेख प्रासंगिक हो सकता है, वहाँ भी व्याख्याकार ने ऐसा कोई निरूपण प्रस्तुत नहीं किया है। जैसे, परिमाण के उपभेद 'दीर्घ', 'ह्रस्व' आदि गुणों के प्रसंग में प्रशस्तपादभाष्य की व्याख्या करते हुए कन्दलीकार ने यह सिद्ध किया है कि द्रव्यों में समवेत दीर्घ, ह्रस्व गुण परस्पर-विरोधी हैं तथा वे अन्य गुणों की भाँति वस्तुनिष्ठ तथा तत्त्वतः अचर गुण हैं। यदि उसमें प्रेक्षक के भेद से कभी दीर्घ तथा कभी ह्रस्व की प्रतीति होती है तो वह विरोधी होने से वास्तविक नहीं, अपितु औपचारिक है[५]। पर गणित में त्रिशतिकाकार ने 'दैर्घ्य' का प्रयोग लम्बाई के लिये तथा 'विस्तर' का चौड़ाई के लिये किया है[६]। यह दैर्घ्य अन्ततः विस्तर के सापेक्ष है। 'विस्तर' के बदलने पर दैर्घ्य के प्रयोग में व्यतिक्रम हो सकता है। उक्त प्रसंग में कन्दलीकार द्वारा गणित के इस तथ्य का उल्लेख हो सकता था। पर ऐसा न होने से ऐसा नहीं लगता कि कन्दली तथा त्रिशतिका के प्रणेता एक ही होंगे।

---

१. भारतीय ज्योतिष शास्त्र पृ. 230

२. History of Hindu Mathematics, Vol. II

३. भारतीय ज्योतिष का इतिहास - डा. गोरख प्रसाद पृ. 165 तथा Time of Shridharacharya - Dr. Sabal Singh, Annals of Bhadarkar O.R.I. Vol. 41, (1950) Page 267

४. भारतीय दर्शन-शास्त्र, न्याय वैशेषिक, डा. धर्मेन्द्रनाथ शास्त्री पृ. 125

५. न चैकस्य दीर्घत्वं ह्रस्वत्वं चोभयमपि वास्तवं युक्तम्, विरोधात्-प्रशस्तपादभाष्य, परिमाण-प्रकरण पर न्यायकन्दली।

६. त्रिशतिका सूत्र श्लोक 53, पृ. 101 उक्त प्रसंग के सभी उद्धरणों के लिये परिशिष्ट 1 में 'दैर्घ्य' शब्द।

उक्त विवेचनाओं के आधार पर प्राय: सभी विद्वान् श्रीधराचार्य को कन्दलीकार तथा गणितसारसंग्रहकार महावीराचार्य से पूर्ववर्ती मानते हैं। पर पाटी-गणित के व्याख्याकार डा. कृपाशंकर शुक्ल ने इन्हें कन्दलीकार का पूर्ववर्ती पर महावीराचार्य का उत्तरवर्ती स्वीकार किया है।

इस विषय में डा. शुक्ल द्वारा प्रस्तुत लगभग सभी तथ्य 'अभाव' प्रमाण पर अवलम्बित हैं। उनका मानना है कि 'पाटी-गणित' में अनेक रोचक सूत्र वर्तमान हैं, जो कि *गणितसारसंग्रह* में उपलब्ध नहीं है। यदि महावीर श्रीधर के बाद होते तो वे उनका उल्लेख अवश्य करते। ऐसा न होने से श्रीधर उत्तरवर्ती सिद्ध होते हैं[१]।

पर वास्तव में इस प्रकार के तथ्यों से किसी को पश्चाद्वर्ती प्रमाणित नहीं किया जा सकता। प्रत्येक लेखक की अपनी शैली होती है। वह अपनी सुविधानुसार अन्यों के तथ्यों को ग्रहण करता है। महावीर द्वारा श्रीधर के सूत्रों को ग्रहण न करने से उनकी मौलिकता की प्रवृत्ति सुस्थापित होती है पूर्ववर्तिता नहीं।

`डा. शुक्ल का यह भी मानना है कि श्रीधराचार्य के सूत्र अधिक सही तथा सूक्ष्मता के अधिक समीप हैं, जबकि महावीर के उतने समीप नहीं हैं। इनसे प्रकट है कि श्रीधर ने महावीर के सूत्रों के अवलोकन के पश्चात् अपने गम्भीर विचार के अनन्तर अधिक सूक्ष्मता प्रदान की होगी। इसके लिये उन्होंने गोले के आयतन के सूत्र का उदाहरण प्रस्तुत किया है, जो इस प्रकार है-

श्रीधराचार्य के अनुसार गोले का आयतन $= \frac{(\text{व्यास})^3}{2} \left(1+\frac{1}{18}\right)$

$\Rightarrow 4\ (\text{त्रिज्या})^3 \left(1+\frac{1}{18}\right) \qquad \Rightarrow (4.22\text{--})\ \text{त्रिज्या}^3$

महावीर के अनुसार गोले का आयतन $= \frac{9}{2} \times \frac{9}{10}$ त्रिज्या$^3 \Rightarrow 4.05$ त्रिज्या^{3}

आधुनिक गणित में गोले का आयतन $= (\frac{4}{3})\ \pi$ त्रिज्या$^3 \Rightarrow (4.188)$ त्रिज्या^{3}

यहाँ स्पष्टत: श्रीधराचार्य का सूत्र आधुनिक मान के अधिक समीप है। अत: श्रीधर महावीर के पश्चात् हुए होंगे[२]।

इस विवेचना में कुछ तथ्य सूक्ष्मता से विचारणीय हैं। प्रथम यह कि इस समय हम आधुनिक मान के साथ तुलना करते हुए किसी पूर्ववर्ती को कम या अधिक सही सिद्ध कहते हैं। पर उस प्राचीन युग में निश्चय रूप से यह सिद्ध

---

१. Absence of these interesting rules from an exhaustive work like the Ganit-Sar-Sangraha cannot be explained unless we assume its preority over the works of Shridharacharya - Introduction of Pati Ganit by K.S.Shukla. Page 40

२. Ibid Page 18

करना सम्भव नहीं था कि कौन अधिक परिष्कृत मान है। अतः गणितज्ञ अपने-२ निष्कर्षों के आधार पर अपने मान को अधिक सही समझते थे। हम देखते हैं कि सबसे पहले आर्यभट ने π का समीपतम मान प्राप्त किया था। पर इनके पश्चात् श्रीधर तथा महावीर दोनों ने समान रूप से इनकी उपेक्षा करते हुए सुविधा की दृष्टि से इनसे स्थूल मान $\sqrt{10}$ को स्वीकार किया है[१]। पर इतने मात्र से आर्यभट को इनसे उत्तरवर्ती तो नहीं कहा जा सकता।

गोले के आयतन के प्रसंग में श्रीधर तथा महावीर में अन्तर इतना कम है कि उसके आधार पर पूर्ववर्तिता या उत्तरवर्तिता का कोई निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता। इन दोनों आचार्यों का यह अन्तर भी सूत्र की पद्धति की भिन्नता के कारण है। प्राचीन गणित में सूक्ष्मतम गणना को ओझल करते हुए अलग-२ पद्धतियों से मौलिक सूत्र को संकेतित करने की परम्परा रही है। उनका वह संकेतित मौलिक सूत्र ही पूर्ण महत्त्वशाली होता है। क्योंकि उसकी ही उपपत्ति आदि सम्भव होती है। इस प्रसंग में मौलिक सूत्र वह है जिसमें पाई अवश्य सम्मिलित हो। इस पाई के मान को दोनों ही आचार्य समान रूप से $\sqrt{10}$ स्वीकार करते हैं[१]। इस प्रकार वे जिस मौलिक सूत्र की ओर संकेत करते हैं, उनमें कोई अन्तर नहीं है। इसे इस प्रकार प्रकट करते हैं–

श्रीधराचार्य के अनुसार गोले का आयतन $= \frac{19}{36} \times$ व्यास^3

$\pi = \sqrt{10} = \frac{19}{6} = 3.16$ का अलग उल्लेख करने पर–

$$\Rightarrow \quad \frac{3.16 \times \text{व्यास}^3}{6}$$

गोले के आयतन का मौलिक सूत्र $\Rightarrow (\frac{4}{3} \times 3.16)$ त्रिज्या^{3}

महावीराचार्य के अनुसार गोले का सूक्ष्म आयतन $= \frac{9}{10} \times \frac{9}{2} (\frac{1}{2}$ व्यास$)^3$

$= \frac{9}{2} \times \frac{9}{10}$ त्रिज्या^{3}

$\pi = \sqrt{10} = 3.1$ का अलग उल्लेख करने पर–

गोले के आयतन का मौलिक सूत्र $\Rightarrow (1.3 \times 3.1)$ त्रिज्या^{3}

इस प्रकार स्पष्टतः दोनों ही आचार्यों के सूत्र एक ही प्रकार की मौलिक अवधारणा से विकसित हैं। इस प्रकार वे पाई के मान को छोड़कर आधुनिक गणित के अनुरूप सिद्ध होते हैं। श्रीधर की महनीयता π के सूक्ष्मतर मान को

---

१. वृत्तक्षेत्रव्यासः दशपदगुणितो भवेत् परिक्षेपः - गणितसारसंग्रह - क्षेत्रगणित व्यवहार, श्लोक 60 यही मान त्रिशतिका सूत्र 45, पृ. 117 में वर्णित है।

अपनाने के कारण है। मौलिक सूत्र में दोनों समान हैं। महावीर ने π के स्थूल मान को 3 मानते हुए इसके आयतन का स्थूल सूत्र भी विकसित किया है[१]। उसमें भी मौलिक अवधारणा पूर्वोक्त ही है।

त्रिशतिका तथा पूर्ववर्ती गणित– त्रिशतिका से पूर्व भारतीय गणित के चिन्तन, मनन की एक सुदीर्घ परम्परा रही है। इससे पूर्व वैदिक तथा जैन, बौद्ध साहित्य में भी अनेक ग्रन्थ निरन्तर विरचित होते रहे थे। त्रिशतिका की इन ग्रन्थों के साथ तुलना से स्पष्ट विदित होता है कि त्रिशतिकाकार ने इनका अध्ययन किया था तथा अपनी सुविधा तथा औचित्य के आधार पर इनका उपयोग भी किया था। उन्होंने एक ओर ईसा पूर्व में विरचित जैन ग्रन्थ स्थानांग सूत्र में वर्णित[२] गणित के परिकर्म, व्यवहार आदि विषयों का वर्णन किया है तो दूसरी ओर ब्रह्मगुप्त की संकलित आदि 20 क्रियाओं तथा 8 व्यवहारों[३] को भी यथोचित स्थान दिया है। संक्षेप में सभी विषयों का प्रतिपादन इनकी अपनी विशेषता है।

त्रिशतिकाकार द्वारा गणित के उज्ज्वल आलोक-स्तम्भ 'आर्यभटीय' के सूक्ष्म अध्ययन तथा अपने ग्रन्थ में कहीं-२ उसके उपयोग को कुछ शब्दश: तुलनीय सूत्रों से प्रमाणित किया जा सकता है। उदाहरणार्थ 'गच्छ' या पद (n) को ज्ञात करने हेतु सूत्र–

मूलं द्विगुणाद्यूनं स्वोत्तरभाजितं सरूपार्धम्–आर्यभटीय 1.20

तथा–

मूलं द्विगुणमुखोनं सचयद्विचयोद्धृतं गच्छः।

–त्रिशतिका श्लोक 41, पृ. 102

यहाँ आर्यभटीय की शब्दश: छाया देखी जा सकती है। पर उन्होंने सब जगह आर्यभटीय का अनुकरण नहीं किया है। जैसे आर्यभटीय ने परिधि का आनुपातिक मान 62832/20,000 अथवा 3.1416 निर्धारित किया है[४], जो कि परिशुद्धि के सर्वाधिक समीप मान माना जाता है। पर त्रिशतिकाकार ने 500 ई.

---

१. व्यासार्धघनार्धगुणा नवगोल-व्यावहारिकं फलम्
तद्दशमांशं नवगुणमशेषसूक्ष्मफलं भवति।। - गणितसारसंग्रह $8.28\frac{1}{2}$

२. परिकम्मं ववहारो रज्जुरासी कलासवन्ने ये
जावन्तावति वग्गो घनो वग्गवग्गो विकप्पोत - स्थानांग सूत्र, 747

३. परिकर्म विंशतिमिमां संकलिताद्यां पृथगविजानाति।
अष्टौ च व्यवहारान् छायान्तान् भवति गणकः सः।।

४. चतुरधिकं शतमष्टगुणं द्वाषष्टिस्तथा सहस्राणाम्।
अयुतद्वयविष्कम्भस्यासन्नो वृत्तपरिणाहः। - आर्यभटीय, गणितपाद 1.10

पू. में विरचित जैन गणित ग्रन्थ 'सूर्य-प्रज्ञप्ति' से[१] चली आ रही परम्परा के अनुसार इसका मान $\sqrt{10}$ निर्धारित किया है। उन्होंने शंकु के आयतन के लिये इसका मान 3 मानते हुए तथा गोले के आयतन के लिये 3.16 मान स्वीकृत करते हुए सूत्र विकसित किये हैं। उदा. श्लोक 94 की संस्कृत व्याख्या में बेलन आकार प्रस्तर-पिण्ड के घनफल को 3.162 मान स्वीकार करते हुए हल किया गया है। फिर भी हम यह नहीं मान सकते कि त्रिशतिकाकार को आर्यभटीय-प्रोक्त मान परिज्ञात नहीं था। जब कि D.E. Smith जैसे इतिहासकार अनायास ही इसे मानने को तैयार हो जाते हैं[२]। वास्तविकता यह है कि त्रिशतिकाकार आर्यभटीय को जानकर भी सूत्रों की सुविधा के लिये इससे पूर्व के पारम्परिक मान को स्वीकार करते हैं।

इस सन्दर्भ में यह भी एक तथ्य है कि त्रिशतिकाकार जिस पूर्ववर्ती सूत्र को अपनाते हैं, उसे स्वच्छता एवं स्पष्टता प्रदान करते हैं। उदाहरणतः–

(I) 'गच्छ' के प्रसंग में द्विघात समीकरण (quadratic equation) की विधि की आर्यभटीय से तुलनीयता को अभी ऊपर निरूपित किया गया है। इस प्रकार इस विधि को मूलतः आर्यभट ने तथा अनन्तर ब्रह्मगुप्त ने प्रस्तुत किया है। इन सबका अनुशीलन करते हुए त्रिशतिकाकार ने इसे सर्वथा स्पष्ट रूप प्रदान किया है। अतएव परवर्ती भास्कराचार्य ने लीलावती में इनके ही आधार पर अपना सूत्र प्रस्तुत किया है[३]। साथ ही उन्होंने भास्करीय बीजगणित में श्रीधराचार्य के एक अन्य महत्त्वपूर्ण ग्रन्थ 'बीज-गणित' (वर्तमान में अनुपलब्ध) से द्विघात-समीकरण के सम्पूर्ण सूत्र को अविकल उद्धृत करते हुए[४] उनके ऋण को स्पष्ट रीति से स्वीकार किया है। अतएव गणित के आधुनिक इतिहासकारों द्वारा वर्ग-समीकरण के साथ श्रीधराचार्य का नाम जोड़ दिया गया है। स्पष्ट सूत्र प्रदान करने के लिये श्रीधराचार्य का अवदान अनमोल है। फिर भी वर्ग-समीकरण सूत्र के मौलिक अन्वेष्टा के रूप में आर्यभटीय, गणितपाद श्लोक 20 में आर्यभट के मूल्यवान् योगदान को भुलाया नहीं जाना चाहिये।

---

१. सूर्य प्रज्ञप्ति सूत्र 20

२. As to the ratio of the circumference to the diameter, both ब्रह्मगुप्त and महावीराचार्य used the old sementic value 3, both giving also $\sqrt{10}$ as a closer approximation, and neither one was aware of the works of Archemedes or of Heron.

३. ब्रह्मगुप्त तथा भास्कर के सूत्र के लिये देखें परिशिष्ट 2 में 'गच्छ' शब्द

४. चतुराहतवर्गसमै रूपैः पक्षद्वयं गुणयेत्।
अव्यक्तवर्गरूपैर्युक्तौ पक्षौ ततो मूलम् – भास्करीय बीजगणित पृ. 229 में उद्धृत श्रीधराचार्य का सूत्र।

(II) त्रिशतिकाकार ने मूलत: आर्यभटीय से स्पष्ट प्रेरणा प्राप्त करके[१] त्रिभुज के क्षेत्रफल के लिये सर्वथा स्पष्ट तथा सही सूत्र प्रदान किया है[२]। इसे आधुनिक गणित में ठीक उसी रूप में स्वीकार किया जाता है। इन्होंने वर्ग तथा आयत के क्षेत्रफल के लिये भी आर्यभटीय से प्रेरणा प्राप्त करते हुए[३] स्वच्छ तथा सर्वमान्य नियम विकसित किये[४]।

इन्होंने मूलत: ब्रह्मगुप्त से प्रभावित होकर[५] त्रिभुज तथा चतुर्भुज के क्षेत्रफल के लिये एक सामान्य सूत्र प्रस्तुत किया है[६]। ब्रह्मगुप्त ने इसे दोनों प्रकार की आकृतियों के सूक्ष्म क्षेत्रफल के लिये लागू होने वाला सामान्य सूत्र बताया था। श्रीधर ने इसे स्वीकार करते हुए अपनी पाटी-गणित में विस्तार से यह बताया कि यह सूत्र समलम्ब तथा सभी विषमलम्ब चतुर्भुज (quadrilaterals with unequal altitudes) के लिये भी समान रूप से समन्वित होता है[७]।

आगे चलकर इस सूत्र के प्रतिबन्धों का अनुभव कर लिया गया था। सर्वप्रथम आर्यभट द्वितीय ने इस सूत्र की सभी प्रकार के चतुर्भुजों के प्रति व्यापकता का स्पष्ट प्रतिषेध किया तथा ऐसा मानने वालों के प्रति बड़े कठोर शब्दों का प्रयोग किया।[८]

बाद में भास्कराचार्य ने भी इस सूत्र से चतुर्भुज के अस्फुट या अवास्तव क्षेत्रफल की बात कही[९]। उन्होंने बताया कि भुजाओं की नाप एक समान होने पर भी उनमें अलग-२ नाप के विकर्ण खींचने से अनेक अनियत आकार के चतुर्भुज तथा उनके अलग-२ क्षेत्रफल प्राप्त होते हैं[१०]। ऐसी दशा में पूर्वोक्त सूत्र से चक्रीय तथा अचक्रीय सभी प्रकार के आकारों वाले चतुर्भुज के लिये प्राप्त एक निश्चित

---

१. त्रिभुजस्य फलं शरीरं समदलकोटी भुजार्धसंवर्ग: - आर्यभटीय, गणितपाद 1.6
२. कुदलं च लम्बहतम् - त्रिशतिका सूत्र 43, पृ. 86
३. वर्ग: समचतुरश्र: फलं च सदृशद्वयस्य संवर्ग: - आर्यभटीय, गणितपाद 1.3
४. समचतुरस्रायतयोर्भुजकोटिहति: प्रजायते गणितम् - त्रिशतिका सूत्र 42
५. भुजयोगार्धचतुष्टयभुजोनघातात् पदं सूक्ष्मम्। - ब्राह्मस्फुट सिद्धान्त 12.21
६. त्रिशतिका सूत्र 43।
७. सदृशासमलम्बानामसदृशलम्बे विषमबाहौ - पाटी गणित श्लोक 116
८. कर्णज्ञानेन विना चतुरश्रे लम्बकं फलं यद् वा।
वक्तुं वाञ्छति गणको योऽसौ मूर्ख: पिशाचो वा। —महासिद्धान्त 14.70
९. मूलमस्फुटफलं चतुर्भुजे - लीलावती, क्षेत्रव्यवहार श्लोक 19
१०. चतुर्भुजस्यानियतौ हि कर्णौ कथं ततोऽस्मिन्नियतं फलं स्यात्। - लीलावती, क्षेत्रव्यवहार श्लोक 20

क्षेत्रफल अवास्तव ही होगा। इसलिये आधुनिक गणित में भी इस सूत्र को केवल चक्रीय चतुर्भुज (cyclie quadrilaterals) के लिये ही समुचित माना जाता है।

यहाँ यह उल्लेखनीय है कि श्रीधर ने अपने सूत्र में किसी प्रतिबन्ध का उल्लेख तो नहीं किया है। पर उन्होंने सावधानीपूर्वक ऐसे उदाहरण तथा उसके ऐसे फल का निरूपण किया है, जो चक्रीय चतुर्भुज के लिये सर्वथा सुसंगत है। विषम लम्ब-चतुर्भुज ब्रह्मगुप्त-प्रमेय द्वारा प्राप्त विकर्णों का प्रयोग करने पर चक्रीय होता है। श्रीधर ने अपने उदाहरण में अपने सूत्र से जो क्षेत्रफल बताया है, वह उस प्रमेय से प्राप्त विकर्ण का प्रयोग करने से प्राप्त क्षेत्रफल के ठीक समतुल्य बैठता है। इससे यह संकेत मिलता है कि श्रीधर अपने सूत्र में प्रतिबन्धों का उल्लेख न करते हुए भी एक निश्चित नियम द्वारा विकर्ण बनाकर तथा इस प्रकार चक्रीय चतुर्भुज बनाकर अपने सूत्र को समन्वित करने के प्रति सतर्क थे।

श्रीधराचार्य के मौलिक सूत्र– गणित के क्षेत्र में श्रीधर के ग्रन्थ अत्यन्त मूल्यवान् हैं। गणित-शास्त्र का विशाल सौध जिन इष्टकाओं से निर्मित है उनमें इनके ग्रन्थों की चमत्कारी इष्टकाएँ भी यत्र तत्र फैली हुई हैं। उन्होंने ऐसे अनेक सूत्र प्रदान किये, जो इनसे पहले अपरिज्ञात थे।

उदाहरणत:, गोले के आयतन के लिये उन्होंने सर्वप्रथम सूत्र विकसित किया। इससे पूर्व आर्यभट ने आर्यभटीय गणितपाद में इसके लिये जो सूत्र प्रस्तुत किया[१], वह आधुनिक गणित के अनुसार सही नहीं है। उन्होंने गोलपाद 3.22 में ऐसे गोल-काष्ठ का भी वर्णन किया है, जो पारा आदि भरकर निर्मित होने पर स्वत: सदा गतिशील रहता था। मध्ययुग में विश्व के अनेक देशों में ऐसे शाश्वत चलित्र के निर्माण में अपार परिश्रम किया गया[२]। आधुनिक विज्ञान में 'ऊर्जा संरक्षण नियम' की स्थापना द्वारा यह सिद्ध कर दिया गया है कि कोई भी चक्र वायु आदि के अवरोध तथा घर्षण-बल आदि की उपस्थिति में स्वत: सदा गतिशील नहीं रह सकता। अत: ऐसा गोल-काष्ठ काल्पनिक है। पर श्रीधराचार्य का गोले के आयतन का सूत्र सर्वथा वास्तविक एवं प्रामाणिक है।

श्रीधर ने पूर्ववर्ती विद्वानों का अनुसरण करते हुए अर्धवृत्त के क्षेत्रफल के सूत्र के सामान्यीकरण द्वारा प्रत्येक वृत्त-खण्ड के लिये सूत्र विकसित किया है। साथ ही वे इस तथ्य से सर्वथा अवगत थे कि अर्धवृत्त में जीवा तथा शर का जो अनुपात है, वह अन्य वृत्त-खण्डों का नहीं है। उन्होंने उदा. श्लोक 86 में ब्रह्मगुप्त के सूत्र के अनुसार 13 जीवा पर 3 शर का बिल्कुल सही प्रमाण बताया है।

---

१. तन्निजमूलेन हतं घनगोलफलं निरवशेषम्।। –आर्यभटीय, गणितपाद, श्लोक 7

२. द्रष्टव्य-मनोरंजक भौतिकी या.इ.पेरेलमान पृ. 72 तथा आगे

के अन्य प्रसंग में स्तम्भ को आधार बनाकर और भी कठिन प्रश्न विकसित किये गए हैं[1]।

इनके पश्चात् आर्यभट द्वितीय के 'महा-सिद्धान्त', श्रीपति के 'गणित-तिलक' तथा नारायण के गणित-कौमुदी आदि में श्रीधर के अनेक सूत्र तथा उदाहरण शब्दशः प्रस्तुत किये गए हैं। भास्कराचार्य ने तो उनका नाम लेकर अनेक सूत्र और उदाहरणों में उनका ऋण स्वीकार किया है। उदाहरणतः लीलावती इष्टकर्म के उदा. 1 के अन्तर्गत 'षड्भागः पाट्लासु....' के लिये उन्होंने स्पष्ट कहा है कि यह श्लोक त्रिशतिका का है। भास्करीय बीजगणित में श्रीधर के वर्ग-समीकरण के सूत्र को इस भूमिका के पृ.7 में दिखाया जा चुका है।

भास्कराचार्य ने श्रीधर के गणित के इन सूत्रों के आलोक में गणित का पर्याप्त विकास किया। अभी श्रीधर के जिस वर्ग-समीकरण की चर्चा की गई है, उसे द्विपद के गुणनफल तथा उसके गुणनखण्डन के बिना भली प्रकार नहीं समझा जा सकता। अतः उन्होंने इनके लिए स्पष्ट सूत्र प्रस्तुत किये, जो आधुनिक गणित में खूब प्रचलित है[2]।

त्रिशतिकाकार ने शून्य-परिकर्म के प्रसंग में कहा है कि शून्य को किसी राशि से गुणा आदि करने पर उसका फल शून्य होता है। आगे तुरत ही यह भी कहा है कि शून्य से किसी राशि को गुणित करने पर उसका फल भी शून्य होता है[3]। इस प्रकार उन्होंने $0 \times a$ तथा $a \times 0$ इन दोनों स्थितियों की परिकल्पना की है। गुणन के क्रम-विनिमेय गुण के कारण इन दोनों का परिणाम एक ही बताया है।

उन्होंने पूर्वोक्त प्रथम नियम के साथ 'आदि' का प्रयोग करते हुए यह भी ध्वनित किया है कि शून्य को किसी राशि से भाग करने पर उसका फल भी शून्य होता है। अतः $0/a$ भी सही है। पर उन्होंने गुणन की दोनों स्थितियों के समान भाग की दोनों स्थितियों की कल्पना नहीं की है। उन्होंने शून्य से किसी राशि को भाग देने पर उसके परिणाम के विषय में सावधानीपूर्वक कुछ नहीं कहा है। सम्भव है उन्हें $a/0$ के अपरिभाष्य होने का आभास रहा है!!

---

१. वही, प्रकीर्णक व्यवहार, भागसंवर्गजाति में श्लोक 60 तथा भिन्न दृश्य जाति में श्लोक 70

२. खण्डद्वयस्याभिहतिर्द्विनिघ्नी तत्खण्डवर्गैक्ययुता कृतिर्वा - लीलावती, अभिन्नपरिकर्माष्टक श्लोक 9

३. खस्य गुणनादिके खं संगुणने खेन च खमेव - त्रिशतिका सूत्र 8, पृ. 11

उन्होंने इस तथ्य के आलोक में पूर्ववर्ती सूत्र को परिष्कृत करते हुए अधिक सही सूत्र प्रदान किया है।

इसी प्रकार समलम्ब चतुर्भुज (traperium) के क्षेत्रफल के लिये इन्होंने सर्वथा मौलिक सूत्र प्रदान किया है। यहाँ 'लम्ब' का प्रयोग भी इनका अपना है। इसके लिये त्रिशतिका तथा 'पाटी गणित' में कुछ शाब्दिक भिन्नता के साथ सूत्र प्रदान किये गए हैं[१]। पर दोनों का भाव एक ही है। आगे चलकर भास्कराचार्य आदि ने इनसे प्रेरणा प्राप्त करके अपने-२ शब्दों में सूत्र प्रदान किये हैं[२]। आधुनिक गणित में इनका यह सूत्र पूरी तरह मान्य है।

केवल त्रिशतिका में प्राप्त कुछ सूत्रों का संक्षिप्त निरूपण इस भूमिका के IV में किया गया है। सूचीखात का घनफल या शंकु के आयतन के लिये उनका सूत्र ब्रह्मगुप्त आदि से विलक्षण है[३]। यद्यपि उनका सूत्र अन्ततः ब्रह्मगुप्त के सूत्र में ही पर्यवसित होता है। उन्होंने यह सूत्र $\pi=3$ मानकर प्रस्तुत किया है। यह उल्लेख रोचक है कि इस सूत्र को सुविधा जनक मानते हुए भास्कराचार्य ने भी यहाँ पाई के इस मान को स्वीकार कर लिया है[४]। यद्यपि वे अन्य सभी जगह इस का मान $\frac{22}{7}$ स्वीकार करते हैं। भास्कराचार्य ने ब्रह्मगुप्त का अनुसरण करते हुए अन्य सूत्र भी प्रस्तुत किया है[५], जो आधुनिक गणित में सर्वथा मान्यता प्राप्त है।

श्रीधर से परवर्ती गणित के लिये प्रेरणाएँ– श्रीधराचार्य के ग्रन्थ ऐसे आलोक-स्तम्भ की भाँति रहे, जिनके प्रकाश में परवर्ती विद्वानों ने अपनी रचनाएँ प्रस्तुत कीं। महावीर ने उनसे भाव प्राप्त करके अनेक उदाहरण अपने शब्दों में प्रस्तुत किये। त्रिशतिका श्लोक 26 की गणितसार-संग्रह 5, 17-22 से तुलना की जा सकती है। त्रिशतिका उदा. श्लोक 23, 24 तथा 25 में स्तम्भ के आधार पर गणित के उदाहरण दिये गए हैं। ये भी महावीर के ग्रन्थ से तुलनीय हैं[६]। इस ग्रन्थ

---

१. चतुरस्रेष्वन्येषु च लम्बगुणं कुमुखयोगार्धम् - त्रिशतिका सूत्र 42, पृ. 83
तथा ⟹ भूवदनसमासार्धं मध्यमलम्बेन संगुणितम् - पाटी गणित सूत्र 115, पृ. 161

२. चतुर्भुजेऽन्यत्र समानलम्बे लम्बेन निघ्नं कुमुखैक्यखण्डम्। - लीलावती, क्षेत्रव्यवहार, श्लोक 23, पृ. 225

३. समभुवि विकीर्णराशेः परिधिषडंशस्य यो भवेद् वर्गः।
सोऽभ्युदयहतो गणितं घनहस्तेऽवस्थितिः खार्याः।। - त्रिशतिका सूत्र 61, पृ. 115
तथा ⟹ क्षेत्रफलं वेधगुणं समखातफलं त्रिभिः सूच्याः - ब्रा.स्फु.सि. 12.44

४. भवति परिधिषष्ठे वर्गिते वेधनिघ्ने घनगणितकराः स्युर्मागधास्ताश्च खार्यः। - लीलावती, राशिव्यवहार, श्लोक 15, पृ. 31

५. समखातफलत्र्यंशः सूचीखाते फलं भवति - लीलावती, खातव्यवहार श्लोक 3, पृ. 31

६. दृष्टोऽष्टमं पृथिव्यां स्तम्भस्य त्र्यंशको मया तोये।
पादांशः शैवाले कः स्तम्भः सप्त हस्ता खे।। -गणितसारसंग्रह, प्रकीर्णक व्यवहार श्लोक 5

भास्कराचार्य ने इस सम्पूर्ण स्थिति के गहन अध्ययन के पश्चात् $a/0 = \infty$ बताया है तथा इसे 'खहर' यह विशिष्ट नाम दिया है[१]। निश्चय ही उन्हें इस परिणाम तक पहुँचने के लिये ब्रह्मगुप्त के तच्छेद तथा त्रिशतिका की इस अपरिभाष्यता से प्रेरणा प्राप्त हुई होगी।

परवर्ती गणित के लिये श्रीधर की देन के सन्दर्भ में यह उल्लेख सुखद है कि उनकी सम्पूर्ण त्रिशतिका में वृत्त-खण्ड के क्षेत्रफल तथा π के मान को छोड़कर सभी सूत्रों को आधुनिक गणित के सूत्रों के समकक्ष सिद्ध किया जा सकता है। उनका वृत्त-खण्ड के क्षेत्रफल का सूत्र भी पूर्ववर्ती जैन-गणित तथा पश्चाद्वर्ती महावीर आदि से अधिक सही है। पर वह त्रिज्या-खण्ड के क्षेत्रफल के समावेश के बिना सर्वथा सही सिद्ध नहीं हो पाया है। श्रीधर ने पाई के मान $\sqrt{10}$ को भी सूक्ष्मतम स्तर तक प्राप्त किया है। पर वह आधुनिक गणित के सर्वथा समतुल्य नहीं है।

त्रिशतिका के रोचक सूत्र– (I) त्रिशतिकाकार ने गणितीय संक्रियाओं के मध्य अनेक रोचक परिणाम प्राप्त किये हैं। उन्होंने 1+2+3---+ अन्तिम पद तक के योग के लिये एक रोचक सूत्र प्रस्तुत किया है। इस विषय में आधुनिक युग के महान् गणितज्ञ गॉस (Karl Freidrich gauss) के बचपन की एक कहानी बहुत प्रसिद्ध है। छह वर्ष के गौस से उसके अध्यापक ने पूछा कि 1+2+3-- इस क्रम से 10 तक संख्याओं का जोड़ सबसे पहले कौन बता सकता है। अन्य छात्र इन्हें संख्या के क्रम से जोड़ में व्यस्त हो गए, तभी गौस ने हाथ उठाकर कहा, 'मैंने कर लिया'। अध्यापक ने पूछा, 'तूने इतनी जल्दी कैसे कर लिया, शैतान'। गौस ने क्या उत्तर दिया, यह तो पता नहीं। पर 'वास्तव में उसे गणित का एक महत्त्वपूर्ण प्रमेय सूझ गया था[२]।

यह बिल्कुल संयोग (chance) की बात है कि त्रिशतिका में ठीक यही प्रश्न तथा इसे हल करने का सूत्र ग्रन्थ के सबसे प्रारम्भ में प्रस्तुत किया गया है। कौन जानता है कि त्रिशतिकाकार को यह प्रमेय किस प्रकार सूझा होगा। संक्षेप के आवेग में उन्होंने सूत्र की उपपत्ति भी नहीं लिखी। पर सूत्र से प्रकट है कि वे उपपत्ति जानते रहे होंगे। प्रस्तुत ग्रन्थ की व्याख्या में इसे निरूपित कर दिया गया है।

(II) त्रिशतिकाकार ने एक रोचक नियम स्थिर किया कि 1 से लेकर कहीं तक की भी क्रमिक विषम संख्याओं का जोड़ अवश्य ही वर्ग संख्या होती है तथा

---

१. खभाजितो राशि: खहर: स्यात्।। लीलावती अभिन्नपरिकर्माष्टक सूत्र 1, पृ. 71

२. Productive thinking - Verdaemir - 1945

वह उस संख्या का वर्ग होती है, जितने पद (number) उस जोड़ में प्रयुक्त हुए हैं। इस प्रकार 1+3+5---99 तक का जोड़ $50^2 = 2500$ होगा। क्योंकि यहाँ कुल 50 विषम संख्याओं को जोड़ा गया है। यह परिणाम क्रमिक संख्याओं के जोड़ 'सर्वधन' के सूत्र से प्राप्त होता है। इसे व्याख्या में समीकरण की पद्धति से प्रकट कर दिया गया है[१]।

(III) त्रिशतिकाकार ने सूत्र 15 में किसी संख्या का घनफल प्राप्त करने के लिये एक नियम बताया है। इसके आधार पर उन्होंने यह रोचक परिणाम प्राप्त किया कि किसी भी संख्या (a) का घन उससे 1 कम संख्या (b) के घन से $3 \times a \times b + 1$ अधिक होता है। जैसे–

$8^3 = (7^3) + (3 \times 8 \times 7 + 1) = 343 + 169 = 512$

इसके सूक्ष्म निरीक्षण से महावीराचार्य ने यह परिणाम प्राप्त किया कि इस a संख्या से 1 कम संख्या से नीचे वाली संख्याओं में भी ठीक यही नियम लागू है[२]। अत: उन्होंने इससे यह मनोरंजक श्रेढ़ी विकसित की–

$8^3 = (6^3) + (3 \times 7 \times 6) + 1 + 169 = 512$

अथवा $8^3 = (5^3) + (3 \times 6 \times 5) + 1 + 169 + 127 = 512$

अथवा $8^3 = (4^3) + (3 \times 5 \times 4) + 1 + 169 + 127 + 91 = 512$ इत्यादि

अन्य रीति से–

$4^3 = 3\ (4 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 1) + 4$

त्रिशतिका के कुछ भाषा-वैज्ञानिक तथ्य– त्रिशतिका-शब्दों के भाषा-वैज्ञानिक अध्ययन से उनके उद्भव तथा विकास पर प्रकाश पड़ता है। भारत में दूरियों को नापने के लिये मूलत: उँगलियों तथा हाथ का उपयोग किया गया था। यह दूरियों के मात्रक के रूप में 'अंगुल' तथा 'हस्त' शब्दों से प्रमाणित है। नापने के लिये 'अंगुल' का प्रयोग वेद में भी प्राप्त है[३]। हाथ से नापने की पद्धति विदेशों में भी प्रचलित रही। यह इसी 'हस्त' अर्थ में लैटिन से नि:सृत cubit शब्द से प्रमाणित है। वहाँ मूलत: पैर अर्थ वाले foot शब्द के दूरी के मात्रक के रूप

---

१. त्रिशतिका सूत्र 11, पृ. 14 तथा उसकी व्याख्या।

२. इष्टादिद्विगुणेष्टप्रचयेष्टपदान्वयोऽथवेष्टकृति:।
व्येकेष्टहतैकादिद्विचयेष्ट-पदैक्ययुक्ता वा। - गणित सार संग्रह, परिकर्मव्यवहार, श्लोक 43 तथा आगे

३. एतावानस्य महिमाऽतो ज्यायाँश्च पुरुष:।
स भूमिं सर्वत: स्पृत्वाऽत्यतिष्ठद् दशांगुलम्।। - यजुर्वेद 31.2

में प्रयुक्त होने के कारण पैरों से नापने की पद्धति भी विकसित सिद्ध होती है।

काल के मात्रकों में 'घटी' का प्रयोग किया गया है। काल के मापने वाले के लिये 'घटी-यन्त्र' तथा केवल 'घटी' शब्द भी प्रचलित रहा है। इस शब्द से प्रकट होता है कि उस समय यह यन्त्र छोटे घड़े के आकार का बनता था। आज कलाई में पहने जाने वाले यन्त्र के लिए 'घड़ी' का प्रयोग करने वाले कितने लोग जानते हैं कि यह मूलत: घड़े के आकार का था।

त्रिशतिका के गणितीय शब्द देश के विभिन्न भागों से प्राप्त किये गए हैं। इससे प्रकट होता है कि इतिहास के विशाल काल-खण्ड में विविध स्थानों में निरन्तर गणितीय चिन्तन जारी था। त्रिशतिका में जहाँ वैदिक शब्दों के आधार पर सहस्र, अयुत आदि का प्रयोग किया गया है, वहीं बौद्ध ग्रन्थों के आधार पर पहली बार नियुत के स्थान पर 'लक्ष' शब्द का प्रयोग प्राप्त होता है।

विनिमय के मात्रकों में मुख्यत: उत्तर भारत में प्रचलित पण आदि का उल्लेख है। साथ ही दक्षिण भारत के 'काकिणी' का भी वर्णन है, जिसका सर्वप्रथम उल्लेख दक्षिण भारत के वार्तिककार कात्यायन ने किया है।[१]

प्राचीन भारतीय गणित में वृत्त तथा गोल दोनों प्रकार के आकारों के लिये 'वृत्त' का प्रयोग होता रहा है। ब्राह्मण ग्रन्थों में वृत्त के लिये 'परिमण्डल' का प्रयोग किया गया है[२] तथा बौद्धग्रन्थ धम्मसंगनी आदि में अण्डाकार के लिये इस शब्द को प्रचलित किया गया। फिर भी गणित में काफी समय तक वृत्त तथा गोल के अर्थों में घालमेल की सम्भावना बनी रही। अत: आर्यभट ने दक्षिण भारत से प्राप्त 'गोल' शब्द को प्रचलित किया। यह अपने इस विशिष्ट अर्थ में मूलत: तेलगू, कन्नड आदि का शब्द है[३]। आर्यभटीय गोलपाद श्लोक ६ में इस 'भूगोल' को आकाश में लटके गोल पिंजरे के समान बताया गया है। सूर्य सिद्धान्त १२.५३ में कहा है कि इस विशाल 'महीगोल' में तात्त्विक दृष्टि से कौन स्थान 'ऊपर' या 'नीचे' कहा जा सकता है। त्रिशतिकाकार ने भी इस शब्द को यथावत् अपनाते हुए इसके आयतन का सर्वप्रथम वर्णन किया। आज हम 'भूगोल शास्त्र' का प्रयोग करते हुए मूलत: दक्षिण भारतीय शब्द का प्रयोग करते हैं।

त्रिशतिका में जैन, बौद्ध ग्रन्थों से प्राप्त अनेक प्राकृत शब्द भी हैं। यहाँ वस्तु-विनिमय के लिये 'भाण्ड-प्रतिभाण्ड' का प्रयोग किया गया है। यह प्राकृत

---

१. काकिण्याश्चोपसंख्यानम्-अ.सू. ५.१.३३ के महाभाष्य पर वार्तिक।

२. परिमण्डल उ वा अयं पृथिवीलोक: -शतपथ ब्राह्मण ७.१.१.३७

३. तेलगू - गुड्डुसु (वृत्त, गोला), गुड्डु (आँख की पुतली), गोड्ड (गोल पत्थर) कन्नड - गुडसु (कोई गोल चीज़) - Sanskrit language - T.Burrow Page 462

प्रभावित संस्कृत शब्द है। इससे ज्ञात होता है कि मुख्यत: पात्रों के विनिमय द्वारा वस्तु-विनिमय की परम्परा जारी थी। इसी प्रकार पदों की संख्या के लिये पारिभाषिक 'गच्छ' का प्रयोग है। यह स्पष्टत: प्राकृत है। संस्कृत व्याकरण की दृष्टि से संज्ञावाचक 'गच्छ' अशुद्ध शब्द है। क्रमिक संख्याओं के लिये 'श्रेढ़ी' का प्रयोग है। यह वेद में प्राप्त 'श्रेणी' शब्द से नि:सृत है। पर व्यापक प्रचलन के कारण यहाँ 'श्रेढ़ी' का ही प्रयोग है।

इससे प्रकट है कि त्रिशतिका में अनेक परम्पराओं से प्राप्त शब्दों तथा विधियों का उपयोग किया गया है।

त्रिशतिका में प्रतिबिम्बित सामाजिक आर्थिक जीवन– यों तो त्रिशतिका मूलत: अंकगणित का ग्रन्थ है। पर इसके सूत्रों, उदाहरणों में प्रसंगवश तत्कालीन जीवन की झाँकी प्राप्त हो जाती है। त्रिशतिकाकार के समय पशु-पक्षि-संकुल, मधुर-मयूर-विरुत रमणीय अरण्यों का बाहुल्य था। अत: ऐसे अनेक उदाहरण प्राप्त होते हैं।

समाज में मुख्यत: निम्न वर्ग तथा स्त्रियों की स्थिति अच्छी नहीं थी। दास, दासियों की खरीद बिक्री इतनी प्रचलित थी कि इसमें अलग से जीव-विक्रय के उदाहरण प्रस्तुत किये गए हैं[१]। यह परम्परा लम्बे काल तक प्रचलित थी। क्योंकि त्रिशतिका से लेकर लीलावती तथा 1039 ई. के गणित-तिलक तथा 1356 ई. के गणित-कौमुदी तक में भी ऐसे ही उदाहरण वर्तमान हैं। पाटी-गणित की अज्ञातकर्तृक व्याख्या में सहज ही कहा है कि जैसे कपड़ों आदि का उपयोग करने पर उनका मूल्य घटता है, उसी प्रकार उम्र बढ़ने के व्युत्क्रमानुपात में इनका मूल्य कम होता जाता है। (देखें इस ग्रन्थ में त्रिशतिका प्रस्तुत सूत्र पर उद्धृत टिप्पणी)। वास्तव में यह उस समय की सामाजिक हीन दशा को स्पष्ट प्रकट करता है।

इस समय सामान्य लोगों की आर्थिक दशा भी कोई बहुत अच्छी नहीं थी। आम आदमी 'सूदखोरी' की प्रथा से बहुत पीड़ित था। यों तो इस प्रथा का वर्णन वेद, निरुक्त, अष्टाध्यायी, धर्मशास्त्र आदि ग्रन्थों में वर्तमान है। अथर्ववेद के एक मन्त्र में प्रार्थना है कि मैं जिससे ऋण लूँ तथा जिसकी स्त्री के पास जाऊँ, वह मुझसे उलटी, पुलटी बातें कहते हुए डाँटे, फटकारे नहीं[२]!!

त्रिशतिकाकार के समय इस समस्या में जरा भी कमी नहीं आई थी। त्रिशतिका के एक उदाहरण के अनुसार ऋणी को 5% ऋणदाता के लिये, 1%

---

१. त्रिशतिका उदा. 56 पृ. 60

२. यस्मा ऋणं यस्य जायामुपैमि यं याचमानो अभ्यैमि देवा:।
ते वाचं वादिषुर्मोत्तरां मद्देवपत्नी अप्सरसावधीतम्।। – अथर्ववेद 6.118.3

जमानतदार के लिये, $\frac{1}{2}$% मुनीम के लिये तथा $\frac{1}{4}$% ऋणपत्रलेखक के लिये अर्थात् कुल $\frac{27}{4}$ % मासिक के हिसाब से ब्याज चुकाना पड़ता था। इस प्रकार 100/= रूप पर वार्षिक कुल ब्याज 81/= रूप प्रदान करना पड़ता था। यह अष्टाध्यायी के 'दशैकादश ऋण[१] से तो कम था। फिर भी सामान्य आदमी को पीढ़ियों तक बन्धुआ मजदूर बना देने के लिये काफी था। त्रिशतिका सूत्र 35 आदि के नियमों के अनुसार ऋण तथा ब्याज का विधिवत् हिसाब रखा जाता था तथा विस्तृत ऋण पत्र तैयार किये जाते थे।

धनी लोगों में सोना का प्रयोग पर्याप्त मात्रा में होता था। इसकी विशुद्धता तथा तदनुसार मूल्य निर्धारित करने की विस्तृत विधियाँ त्रिशतिका में बताई गई हैं। सोना को तपाने पर इसके उज्ज्वल वर्ण के आधार पर मूल्य तय होता था। सबसे बढिया चमकदार सुवर्ण 16 वर्ण (24 कैरेट) का होता था। इसे कल्याण सुवर्ण कहा जाता था। यह बहुत प्राचीन काल से प्रचलित था। निरुक्तकार यास्क ने निरुक्त 2.3 में दमकते चेहरे वाले मनुष्य की उपमा इस कल्याण-वर्ण से की है। इसमें अन्य धातुओं को मिलाने पर क्रमशः हीन वर्ण का हो जाता था।

उस समय वन-सम्पदा का बाहुल्य था। गृह-निर्माण आदि के लिये विशाल पेड़ों की चिराई करके उनसे पटरे तैयार किये जाते थे। उदा. श्लोक 100 में 100 हाथ लम्बे अतिविशाल पटरे का तथा उदा. श्लोक 101 में 1 हाथ व्यास वाली अतिस्थूल खैर की लकड़ी से बनने वाले पटरे का वर्णन किया गया है उनके क्षेत्रफल, चिराई की मजदूरी आदि के लिये गणित की आवश्यकता होती थी। त्रिशतिकाकार ने श्लोक 59, 60 के में काष्ठ व्यवहार के अन्तर्गत उन सूत्रों का वर्णन किया है।

कृषि के लिये खेतों को नापने की अनेक विधियाँ विकसित की गई थीं। रेखा-गणित के अनेक नियम क्षेत्र-मापन के लिये आविष्कृत हुए थे। फसल पकने के बाद धान के बड़े-२ ढेरों को मापने के लिये सूची खात का घनफल या शंकु के आयतन की विधि विकसित हुई थी। श्लोक 61 में बताया है कि मगध देश या बिहार में समपृष्ठ वाली धरती पर शंकु आकार में पड़ा हुआ 1 घन हस्त धान 1 खारी के समतुल्य माना जाता था। इसमें कमरे के अन्दर या बाराण्डे के बाहर रखे गए ढेर से अपूर्ण शंकु बनने पर उनके घनफल जानने की भी अलग-२ विधि बताई गई है।

त्रिशतिकाकार के समय मुद्राओं का प्रयोग प्रचलित था। श्लोक 4 में विनिमय के मात्रकों के रूप में प्राचीन काल से चली आ रही अनेक मुद्राएँ बताई

१. कुसीददशैकादशात्ष्ठन् ष्ठचौ (पा.सू. 4-4-31)

गई हैं। उदा. श्लोक 98 आदि में मजदूरी आदि के प्रसंग में 'रूप' नामक सामान्य सिक्के का उल्लेख किया गया है। पाणिनि ने अ.सू. 5.2.120 में आहत या ठप्पा लगे सिक्कों के लिये 'रूप्य' नाम दिया है। कार्षापण आदि ऐसे सभी सिक्के चाँदी पर बनाए जाते थे। अत: रूप्य का अर्थ चाँदी भी है। ऐसे सभी प्रकार के सिक्कों के लिये 'रूप' का प्रयोग भी होता रहा है।

समाज में इन सिक्कों की उपलब्धता पर्याप्त मात्रा में नहीं थी। अत एव वस्तु-विनिमय भी प्रचलित था। वस्तुओं की अलग-२ मात्रा के मुद्रा में मूल्य तय होने के पश्चात् भी उनका आपस में अनुपात से मूल्य तय किये जाने की भी आवश्यकता होती थी। अत: त्रिशतिका सूत्र 38 आदि में इसके नियम बताए गए हैं।

ग्रन्थ का सम्पादन– भूमिका के प्रारम्भ में कहा गया है कि म. म. पं. सुधाकर द्विवेदी ने वर्ष 1899 ई. में इस ग्रन्थ को पहली बार प्रकाशित किया था। तबसे पूरी 1 शताब्दी के बीच यह ग्रन्थरत्न दूसरी बार प्रकाशित नहीं हो सका। इस दशा में इसकी दुर्लभता का सहज अनुमान किया जा सकता है। अत: 'सुक्षेमा' नामक व्याख्या के साथ इसका सम्पादन करते हुए इस ग्रन्थ को सुलभ तथा सुग्राह्य बनाने का एक विनम्र प्रयास किया गया है। इस व्याख्या की कुछ प्रमुख विशेषताएँ इस प्रकार हैं–

1. इसका सबसे प्रमुख उद्देश्य प्राचीन गणित को आधुनिक परिवेश में प्रस्तुत करना है। अत: ग्रन्थ में उल्लिखित नियमों को आधुनिक चिह्नों से युक्त सूत्र का रूप प्रदान किया है। साथ ही उल्लिखित प्रत्येक उदाहरण में सम्बद्ध सूत्र का अनुप्रयोग करते हुए उनकी सिद्धि भी की गई है। इसमें भिन्न संख्याओं के जोड़ आदि की प्राचीन विधि के वर्णन के पश्चात् नवीन लेखन क्रम को अपनाया है।

2. प्राचीन गणित की विधियों में उनकी उपपत्तियों का निरूपण बहुत कम प्राप्त होता है। आधुनिक गणित में किसी भी नियम या सूत्र को उनकी उपपत्ति के बिना स्वीकार नहीं किया जा सकता। अत: प्रस्तुत व्याख्या में प्रत्येक सूत्र की उपपत्ति को प्रस्तुत किया गया है।

3. श्रीधराचार्य ने इस त्रिशतिका में अपने बृहत् ग्रन्थ पाटी-गणित के सूत्र, उदाहरण प्राय: प्रस्तुत किये हैं। कहीं-२ उनके शब्दों में अन्तर है। ऐसे भिन्न वाक्यों को तुलना के लिये इस व्याख्या की टिप्पणी में उद्धृत कर दिया गया है।

4. गणित के सिद्धान्तों का क्रमिक विकास तथा परवर्ती प्रभाव का निरूपण भी इस व्याख्या का उद्देश्य है। अत: आवश्यकतानुसार परवर्ती युग में परिष्कृत

सूत्रों का तथा इस विकास के परिणामस्वरूप आधुनिक युग में प्रचलित सूत्रों का भी उल्लेख किया गया है।

5. इस व्याख्या के मूल ग्रन्थ द्वारा प्रसंगत: संकेतित तत्कालीन सामाजिक, आर्थिक परिस्थिति का भी स्पष्ट निरूपण किया गया है। आवश्यकतानुसार विभिन्न शब्दों में प्राकृत प्रभाव, जैन, बौद्ध प्रभाव आदि का भी उल्लेख है। वैदिक परम्परा से प्राप्त तथा पाणिनि, वार्तिककार कात्यायन आदि द्वारा उल्लिखित शब्दों तथा उनके क्रमश: परिवर्तित अर्थों का भी यथावसर विवेचन किया गया है।

6. परिशिष्ट में विविध पारिभाषिक शब्द तथा विविध आचार्यों द्वारा प्रस्तुत सम्बन्धित गणितीय संक्रियाओं के सूत्र अकारादि कम से उल्लिखित किये गये हैं। अन्तिम परिशिष्ट में उन सभी सूत्रों को आधुनिक सूत्रों के साथ आधुनिक पद्धति से प्रस्तुत किया गया है।

धन्यवाद-प्रकाशन– मैं सर्वप्रथम उस अच्युत, अनन्त परमेश्वर के प्रति नतमस्तक हूँ, जिसके गणितीय नियमों से सम्पूर्ण विश्व संचालित हो रहा है, जिसकी अनन्तता की वेदों के शब्दों में महिमा यह है कि हम इन नियमों की जितनी 'भूमि' को जानते हैं, उससे वह 10 अंगुल आगे बढ़ कर है[१]!! गणित के उन महान् विद्वानों के प्रति मैं पुन: नतमस्तक हूँ, जिनके निरन्तर परिश्रम से आज गणित का विशाल सौध निर्मित हो सका है।

वर्ष 1899 ई. में म.म. पं. सुधाकर द्विवेदी के महान् परिश्रम से हमें यह ग्रन्थ सुलभ हो सका है। इनके पश्चात् वर्ष 1959 ई. में डा. कृपाशंकर शुक्ल द्वारा स्वरचित वैदुष्यपूर्ण इंग्लिश अनुवाद के साथ बृहत् ग्रन्थ 'पाटी-गणित' का प्रकाशन किया गया। हमने अपनी व्याख्या में पं. द्विवेदी की टिप्पणियों से तथा तुलना के लिये डा. शुक्ल के अनुवाद से सहयोग प्राप्त किया है। अत: मैं इनके प्रति हार्दिक धन्यवाद तथा आभार प्रकट करता हूँ।

श्री मु. म. टाउन इंटर कालेज, बलिया में व्याख्याता माननीय श्री भोला प्रसाद 'आग्नेय' ने इस व्याख्या का पुनरीक्षण करके अनेक सुझाव प्रदान किये हैं। अत: मैं इनके प्रति हार्दिक धन्यवाद प्रकट करता हूँ।

मुझे 'त्रिशतिका' की छाया प्रति 'पाणिनि महाविद्यालय सोनीपत में पूज्य आचार्य विजयपाल जी विद्यावारिधि से तथा पाटी-गणित माननीय श्री नारायण किंजवेडकर जी, गुरुबाग, वाराणसी के सौजन्य से प्राप्त हुई है। अत: मैं आप दोनों के प्रति विनम्र श्रद्धाभाव प्रकट करता हूँ।

---

१. एतावानस्य महिमाऽतो ज्यायाँश्च पुरुष:।
स भूमिं सर्वत: स्पृत्वाऽत्यतिष्ठद् दशांगुलम्।। - यजुर्वेद 31.2

राष्ट्रिय संस्कृत संस्थान, नई दिल्ली के कुलपति माननीय प्रो. वी. कुटुम्ब शास्त्री जी एवम् उपनिदेशक माननीय डा. प्रकाश पाण्डेय जी ने ग्रन्थ की उपादेयता, महत्ता तथा दुर्लभता का अनुभव करते हुए ग्रन्थ के प्रकाशन की स्वीकृति प्रदान की है। अतः मैं आपके प्रति हार्दिक धन्यवाद एवम् आभार प्रकट करता हूँ।

परिश्रम पूर्वक व्याख्या लिखे जाने पर भी कहीं मानवसुलभ त्रुटियाँ हो सकती हैं, अतः भास्कराचार्य के शब्दों का उपयोग करते हुए–

ये वृद्धा लघवोऽपि येऽत्र गणका बद्ध्वाञ्जलिं वच्मि तान्।
क्षन्तव्यो मम तैर्मुदा यदि क्वचित् व्याख्याप्रमादो भवेत्।।

विदुषां विधेयः
'सुक्षेमा'-व्याख्याकारः

--o--

त्रिशतिका

विषय-सूची

--o--

ग्रन्थ-संक्षेप-सूची

संक्षेप	ग्रन्थ-नाम	प्रणेता।
अथ. वे.	अथर्ववेद	
ऐ. ब्रा.	ऐतरेय ब्राह्मण	
बौ. शु. सू.	बौधायन शुल्ब सूत्र	बौधायन
पा. सू.	पाणिनीय अष्टाध्यायी सूत्र	पाणिनि
म. भा.	महाभाष्य	पतञ्जलि
आ.	आर्यभटीय	आर्यभट प्रथम
ब्रा. स्फु. सि.	ब्राह्म स्फुट सिद्धान्त	ब्रह्मगुप्त
पा. ग.	पाटी-गणित	श्रीधराचार्य
ग. सा. सं.	गणित-सार-संग्रह	महावीराचार्य
प्र. पा. भा.	प्रशस्तापाद-भाष्य	प्रशस्त-पाद
म. सि.	महासिद्धान्त	आर्यभट द्वितीय
ली.	लीलावती	भास्कराचार्य
भा. बी.	भास्करीय बीजगणित	भास्कराचार्य
सि. शे.	सिद्धान्त-शेखर	श्रीपति
ग. ति.	गणित-तिलक	श्रीपति
ग. कौ	गणित-कौमुदी	नारायण

--o--

श्रीधराचार्य-विरचित

त्रिशतिका

अथवा

पाटी गणित सार

नत्वा शिवं स्वविरचितपाट्या गणितस्य सारमुद्धृत्य।
लोकव्यवहाराय प्रवक्ष्यति श्रीधराचार्यः।। १।।

सुक्षेमा अनुवाद-शिव को नमस्कार करके स्वविरचित पाटी-गणित से गणित के सार को उद्धृत करते हुए श्रीधराचार्य लोकव्यवहार के लिये उसे निरूपित करेंगे।

अनुशीलन-प्रकटतः श्रीधराचार्य शैव थे तथा उन्होंने इससे पूर्व 'पाटी-गणित' नामक विस्तृत ग्रन्थ का निर्माण किया था।

दशगुणोत्तर संख्याएँ

एकं दश शतमस्मात् सहस्त्रमयुतं ततः परं लक्षम्।
प्रयुतं कोटिमथार्बुदमब्जं खर्वं निखर्वं च।। २।।

तस्मान्महासरोजं शंकुं सरितां पतिं ततस्त्वन्त्यम्।
मध्यं परार्धमाहुर्यथोत्तरं दशगुणाः संज्ञाः[१]।। ३।।

सुक्षेमा अनुवाद-एक, दश, शत पश्चात् सहस्त्र, अयुत, इसके पश्चात् लक्ष, प्रयुत, कोटि, अर्बुद, अब्ज, खर्व, निखर्व, इसके पश्चात् महासरोज शंकु, सरितां पति=समुद्र, पश्चात् अन्त्य मध्य, परार्ध-ये क्रमशः दशगुणोत्तर संख्याओं के नाम हैं।

अनुशीलन इस श्लोक में वर्णित एक, दश, शत, सहस्त्र, अयुत, अर्बुद, समुद्र, अन्त, मध्य, परार्ध, शब्द संख्याओं के इतिहास में प्राचीनतम शब्दों में से हैं।

---

१. तुल. पाटी-गणित सू. 7-8, ग.ति.पृ. 1, लीलावती अभिन्नपरिकर्माष्टक श्लोक 2-3 ग.कौ. पृ. 1

यजुर्वेद 17.2 में इन सभी का उल्लेख मिलता है। इनमें एक, दश, शत, सहस्र शब्दों के प्रतिरूप भारत से लेकर यूरोप तक की प्राचीनतम भाषाओं में प्राप्त होते हैं। आधुनिक भाषावैज्ञानिकों ने 'शत' की इस विशेषता को देखते हुए भारोपीय भाषा परिवार का सबसे पहला उपविभाजन शतम् तथा केन्तुम् (Centum-Latin) इसके आधार पर ही किया है। निरुक्तकार के अनुसार सहस्र शब्द का मौलिक अर्थ 'शक्तिशाली' यह है। इसके प्रतिरूप भारोपीय शब्दों में इसी अर्थ में इसका प्रयोग प्राप्त होता है।

यजुर्वेद के उक्त मन्त्र में मध्य, अन्त, परार्ध संख्याएँ क्रमशः 10^{10}, 10^{11}, 10^{12} को प्रकट करती हैं। पर यहाँ संख्या नाम अधिक होने से अन्त्य, मध्य, परार्ध, क्रमशः 10^{15}, 10^{16}, 10^{17} को व्यक्त करने के लिये प्रयुक्त हुए हैं।

सहस्र के पश्चात् वैदिक संख्याओं के समान आर्यभटीय में अयुत, नियुत, प्रयुत का उल्लेख किया गया है[२]। पर इन-संख्या-नाम के लगभग एक समान होने के कारण भ्रम की सम्भावना बनी रहती थी। अतः इस ग्रन्थ में पहली बार बौद्ध संख्याओं के आधार पर नियुत के स्थान पर 'लक्ष' का प्रयोग किया गया। परवर्ती गणित ग्रन्थों में यह शब्द पर्याप्त प्रचलित हुआ। साथ ही रामायण के आधार पर कोटि का प्रयोग किया गया। वेद में अर्बुद शब्द 1 करोड़ अर्थ के लिए प्रयुक्त हुआ है। पर इस ग्रन्थ में इसके लिये कोटि शब्द के प्रयोग के कारण इसके आगे की अर्बुद संख्या 1 अरब की वाचक बन गई। आज भी ऐसी ही प्रसिद्धि है। आगे की अब्ज, खर्व, निखर्व, महासरोज संख्याएँ कमल के नामों के आधार पर विकसित हैं, जो कि जैन साहित्य से प्रेरित प्रतीत होती हैं।

विनिमय के मात्रक

षोडशपणः पुराणः पणो भवेत् काकिणीचतुष्केण।
पञ्चाहतैश्चतुर्भिर्वराटकैः काकिणी ह्येका[१]।। ४।।

सुक्षेमा अनुवाद-16 पण का 1 पुराण, 4 काकिणी का 1 पण तथा 5×4=20 वराटक (कौड़ी) की काकिणी होती है।

अनुशीलन-इसके अनुसार $\frac{1}{16}$ पुराण = 1 पण, $\frac{1}{4}$ पण = 1 काकिणी तथा $\frac{1}{20}$ काकिणी = 1 वराटक सिद्ध होता है।

परवर्ती युग में ये नाम बदलते रहे हैं। लीलावती में 16 पण का 1 द्रम्म बताया है। प्रस्तुत मात्रकों के नाम प्राचीन परम्परा के अनुरूप हैं। पर इनका मूल्य

---

१. तुल. पाटी गणित सू. 9, गणिततिलक पृ. 2, लीलावती परिभाषा श्लोक 3

परिवर्तित हो गया है। प्रस्तुत श्लोक में पुराण नाम से वर्णित सिक्के को अष्टाध्यायी में कार्षापण तथा कौटिल्य अर्थशास्त्र में इसे ही पण तथा मुनस्मृति में राजत पुराण कहा गया है। यही भारत का चाँदी का एक प्रसिद्ध सिक्का था। उस समय 16 माष = 1 पण या 1 पुराण माना जाता था। प्रस्तुत विवरण में पण पूर्वप्रचलित माष के अनुरूप है तथा इससे 16 गुना बड़े सिक्के को पण के स्थान पर पुराण नाम दिया गया है। वार्तिककार कात्यायन ने पहली बार दक्षिण भारत से प्राप्त 'काकिणी' नामक सिक्के का उल्लेख किया है। यह 4 काकिणी = 1 माष के अनुरूप था। यहाँ पूर्वप्रचलित माष के पण के समकक्ष होने के कारण 4 काकिणी = 1 पण बताया है। यह तथ्य निम्न चित्र से स्पष्ट है–

कार्षापण का भाग	**प्राचीन ग्रन्थों में वर्णित सिक्के**	**तोल**
$\frac{1}{1}$	कार्षापण-अष्टाध्यायी पण - कौटिल्य अर्थशास्त्र राजतपुराण - मनुस्मृति	32 रत्ती चाँदी
$\frac{1}{16}$	माष	2 रत्ती
$\frac{1}{64}$	काकिणी–वार्तिककार कात्यायन	$\frac{1}{2}$ रत्ती

पुराण का भाग	**त्रिशतिका में वर्णित सिक्के**	**तोल**
$\frac{1}{1}$	पुराण	32 रत्ती चाँदी
$\frac{1}{16}$	पण	2 रत्ती
पण का $\frac{1}{4}$ पुराण का $\frac{1}{64}$	काकिणी	$\frac{1}{2}$ रत्ती
	वाराटक	

गुरुत्व के मात्रक

माषो दशार्धगुञ्जः षोडशमाषो निगद्यते कर्षः।
स सुवर्णस्य सुवर्णस्तैरेव पलं चतुर्भिश्च।। ५।।

सुक्षेमा-अनुवाद दशार्ध याने 5 गुञ्जा का 1 माष, 16 माष का 1 कर्ष, सोने का बना हुआ इसी 1 कर्ष भार का 'सुवर्ण' नामक सिक्का होता है। उसी 4 कर्ष का 1 पल होता है।

अनुशीलन-लीलावती में 2 यव = 1 गुञ्जा कहा है। यह गुञ्जा आधुनिक 'रत्ती' के समकक्ष है। कौटिल्य अर्थशास्त्र में ताँबे के 1 माष को 5 गुञ्जा या 5 रत्ती के बराबर बताया है[१]। जैन ग्रन्थ अनुयोग द्वार सूत्र 132 में माषक= 5 रत्ती, गुञ्जा = 1 रत्ती को सोना तौलने के उपयोग में बताया है। गुञ्जा या घुँघची के लाल फल के कारण इसे 'रक्तिका' तथा प्राकृत में 'रत्ती' नाम दिया गया है। प्राचीन काल में 'माष' तोल और सिक्के दोनों का नाम था। इससे भ्रम की सम्भावना के कारण श्रीधराचार्य ने 'माष' सिक्के का नाम हटाकर उसके स्थान पर 'पण' कर दिया है। (देखें पूर्वोक्त चार्ट)। 'सुवर्ण' नामक सिक्के का संकेत पाणिनि की अष्टाध्यायी तथा वार्तिक में प्राप्त होता है[२]। निरुक्त में सोने के लिये 'कल्याणवर्ण' का प्रयोग प्राप्त है[३]। त्रिशतिका उदा. 48 में सिक्के के लिये 'कल्याणसुवर्ण' नाम प्राप्त है तथा उदा. 42 में इसे 16 पण का बताया है। कौटिल्य में इस सिक्के का भार ठीक यही अर्थात् $16\times5=80$ गुञ्जा बताया है। चरक में भी 4 कर्ष का 1 पल बताया है।

आयतन के मात्रक

खार्येका षोडशभिर्द्रोणैश्चतुराढको भवेद् द्रोणः।
प्रस्थैश्चतुर्भिराढक एकः प्रस्थश्चतुः कुडवः[४]।। ६।।

सुक्षेमा अनुवाद-16 द्रोण की 1 खारी, 4 आढक का 1 द्रोण 4 प्रस्थ का 1 आढक तथा 4 कुडव का 1 प्रस्थ होता है।

अनुशीलन-इसके अनुसार $\frac{1}{16}$ खारी = 1 द्रोण, $\frac{1}{4}$ द्रोण = 1 आढक, $\frac{1}{4}$ आढक = 1 प्रस्थ, $\frac{1}{4}$ प्रस्थ = 1 कुडव सिद्ध होता है।

अष्टाध्यायी में खारी का वर्णन प्राप्त है[५]। पतञ्जलि ने महाभाष्य में द्रोण को खारी का हिस्सा मानते हुए उदाहरण प्रस्तुत किया है[६]। इस नाप की तोल के लिये भी इन्हीं शब्दों का प्रयोग होता था। प्रस्तुत विवरण में आढक, प्रस्थ, कुडव की तोल कौटिल्य अर्थशास्त्र 2.19 के समतुल्य है।

---

१. कौटिल्य अर्थशास्त्र 2.12

२. हिरण्यपरिमाणं धने (पा.सू. 6.2.55) द्वौ सुवर्णौ परिमाणमेव धनमस्य द्विसुवर्णधनः। अर्थात् दो 'सुवर्ण' नामक सिक्कों की पूँजी वाला मनुष्य। सुवर्णशतमानयोरुपसंख्यानम्। पा.सू. 5.1.29 पर वार्तिक।

३. कल्याणवर्णस्येवास्य रूपम्। - निरुक्त 2.3।। 'कल्याणवर्ण सुवर्णं' तदेव यस्य रूपं स कल्याणवर्णरूपः - उक्त पर, दुर्गाचार्य।

४. तुल. पाटी गणित सू. 11 गणितसारसंग्रह 1.36-37 लीलावती परिभाषा श्लोक 8

५. खार्या ईकन् (पा.सू. 5.1.33)

६. अधिको द्रोणः खार्याम् - पा.सू. 5.2.73 पर महाभाष्य तथा 2, 3, 9 पर काशिका।

दूरियों के मात्रक

हस्तोऽङ्गुलविंशत्या चतुरन्वितया चतुःकरो दण्डः।
तद् द्वि सहस्त्रं क्रोशो योजनमेकं चतुःक्रोशम्[१]।। ७।।

सुक्षेमा अनुवाद-4 सहित 20 अर्थात् 24 अंगुल का 1 हस्त, 4 हस्त का 1 दण्ड, 2 हजार दण्ड का 1 क्रोश, तथा 4 क्रोश का 1 योजन होता है।

अनुशीलन-लीलावती में 8 यवोदर का 1 अंगुल बताया है। कौटिल्य अर्थशास्त्र 2.20 में भी ऐसा ही वर्णन है। इस प्रकार पौन इंच के बराबर 1 अंगुल तथा 18 इंच के बराबर 1 हस्त होता था। भारत में हाथ से नापने की परम्परा होने से 'हस्त' नाम दिया गया है। यूरोप में पैर से नापने के कारण पैर का वाचक foot शब्द नाप के लिये प्रचलित हुआ। 3 फुट का 1 गज होता है। क्योंकि 16 अंगुल का 1 फुट तथा 24 अंगुल या डेढ़ फुट का 1 हस्त है। अतः 2 हस्त 1 गज के बराबर है। इस विवरण के अनुसार $2000\times4 = 8000$ हस्त या 4000 गज का 1 क्रोश होता है। योजन का वर्णन अष्टाध्यायी में भी प्राप्त है। 14 क्रोश का 1 योजन सर्वत्र मान्य है।

काल के मात्रक

भवति घटीनां षष्ट्याहोरात्रं तैस्त्रिसंगुणैर्दशभिः।
मासो द्वादशभिस्तैर्वर्षं गणितेऽत्र परिभाषा[२]।। ८।।

सुक्षेमा अनुवाद-60 घटी का 1 अहोरात्र, $3\times10 = 30$ अहोरात्र का 1 मास, 12 मास का 1 वर्ष। यही इस गणित में इनकी परिभाषा है।

अनुशीलन-मास, वर्ष की यह प्राचीन काल से प्रचलित परिभाषा दी गई है। सूर्य सिद्धान्त 1.12 में घटी के लिये नाडी का प्रयोग है। वहाँ 60 विनाडी की एक नाडी तथा 60 नाडी का एक अहोरात्र कहा है। (षड्भिः प्राणैर्विनाडी स्यात् तत्षट्या नाडिका स्मृता। नाडीषष्ट्या तु नाक्षत्रमहोरात्रं प्रकीर्तितम्।) आधुनिक युग में $24\times60 = 1440$ मिनट का एक अहोरात्र माना जाता है। इस दृष्टि से प्राचीन नाडी या घटी 24 मिनट की होती है। इस प्रकार की 60 घटी का 1 अहोरात्र सिद्ध होता है।

---

१. तुल. पाटी गणित सू. 12 ग.सा.सं. 1.29-31 ग.कौ. पृ. 2-3

२. तुल. पाटी-गणित सू. 13

संकलित या 1 आदि संख्याओं का जोड़

सैकपदाहतपददलमेकादिचयेन भवति संकलितम्[१]।

सुक्षेमा अनुवाद-1 सहित अन्तिम पद या संख्या (number या n) को अन्तिम संख्या से गुणित करे तथा गुणनफल का 2 से दल या भाग देवे। इससे 1 आदि क्रमिक संख्याओं के चय या समूह का संकलित या जोड़ प्राप्त होता है इससे हमें यह सूत्र प्राप्त होता है-

$$=1+2+3\text{----अन्तिम पद } (n) \text{ तक का योग} = \frac{n(n+1)}{2}$$

इस सूत्र की उपपत्ति सर्वथा स्पष्ट है। हम देख सकते हैं कि 1 से लेकर 10 तक क्रमशः जोड़ की स्थिति में 10+1 = 11, 9+2 = 11 इस प्रकार 11 के 5 जोड़े बनते हैं। अतः 11×5 ही इन संख्याओं का योग होगा। प्रस्तुत सूत्र में 11 के साथ $\frac{10}{2}$ के गुणन द्वारा ठीक यही कार्य किया गया है।

द्विगुणीकृतसंकलितान्मूलं गच्छोऽवशिष्टसमम्[२]।। १।।

सुक्षेमा अनुवाद-पदों के संकलित से दुगुनी राशि से उन पदों की संख्या को घटाकर वर्गमूल लेने से प्राप्त संख्या 'गच्छ' या पदों की संख्या के ठीक बराबर होती है। यह संख्या द्विगुणीकृत संकलित से पदों के वर्ग को घटाने पर अवशिष्ट संख्या के समतुल्य होती है।

अनुशीलन-यहाँ पदों की संख्या को संकलित के साथ की गई इन संक्रियाओं के परिणाम के समतुल्य बताया है-

$$1+2+3\text{---के संकलित } (S) \text{ के पद } n = \sqrt{2S-n}$$

अथवा-

$$1+2+3\text{---के संकलित } (S) \text{ के पद } n = 2S-n^2$$

ये दोनों परिणाम संकलित के पूर्वोक्त सूत्र के साथ समीकरण की संक्रिया से अनायास प्राप्त होते हैं-

$$1+2+3\text{---अन्तिम पद } (n) \text{ तक का योग } S = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{n^2+n}{2} \qquad \Rightarrow 2S = n^2+n \qquad \Rightarrow n^2 = 2S-n$$

---

१. तुल. पाटी-गणित सू. 14, गणित-कौमुदी पृ. 114

२. तुल. पाटी-गणित सू. 15

प्रथम पक्ष पूर्ण वर्ग होने से द्वितीय पक्ष भी अवश्य पूर्ण वर्ग है। अत:

$n = \sqrt{2S-n}$

अथवा $2s = n^2+n$ $\quad n = 2S-n^2$

इस प्रकार श्लोक में उल्लिखित दोनों तथ्य सर्वथा सही सिद्ध होते हैं।

पदयुतपदवर्गदलं संकलितं वा, तदष्टसंगुणितम्।
रूपयुतं तन्मूलं निरेकमर्धीकृतं गच्छ:[१]।।२।।

सुक्षेमा अनुवाद-अथवा पदों की संख्या से युक्त पदों के वर्ग का आधा उन पदों का संकलित होता है। साथ ही 8 से गुणित संकलित (S) के रूप या 1 से युक्त होने पर प्राप्त संख्या का वर्गमूल तथा उसमें से 1 कम करने तथा 2 से भाग देने पर गच्छ या पद (n) की प्राप्ति होती है।

अनुशीलन-प्रथम उपबन्ध के अनुसार $s = \frac{n+n^2}{2}$ है, जो कि पूर्वोक्त उपपत्ति से सर्वथा स्पष्ट है। दूसरे उपबन्ध में संकलित से पद (n) प्राप्त करने का सूत्र बताया है, जो इस प्रकार होगा–

1+2+3 के संकलित के पद $(n) = \frac{\sqrt{8S+1}-1}{2}$

इसकी उपपत्ति इस प्रकार है–

पूर्वोक्तानुसार $2S = n^2+n$

द्विघात समीकरण का रूप देने हेतु दोनों पक्षों को 4a से गुणा तथा 1 जोड़ने पर–

$$\Rightarrow 4n^2+4n+1 = 8S+1$$
$$\Rightarrow (2n)^2 + 2\times2n\times1+1^2 = 8S+1$$
$$\Rightarrow (2n+1)^2 = 8S+1$$
$$\Rightarrow 2n+1 = \sqrt{8S+1} \quad \Rightarrow 2n = \sqrt{8S+1}-1 \quad = n = \frac{\sqrt{8S+1}-1}{2}$$

इस प्रकार हमने द्विघात समीकरण के सामान्य नियम से श्लोक में प्रोक्त ठीक वही सूत्र प्राप्त कर लिया है। यह त्रिशतिका सूत्र 41 पृ. 80 में 'गच्छ' के अन्तर्गत द्विघात समीकरण के विस्तृत सूत्र के सर्वथा समतुल्य है।

---

१. तुल. पाटी-गणित सू. 15,

उदाहरणानि

एकादि-दशान्तानां संकलितं किं पृथग्दशगुणानाम्।
एकाद्येकचयेन प्रचक्ष्व तस्मात् पदं चाशु।। १।।

न्यासः ।।10।20।30।40।50।60।70।80।90।100।। एतेषु पदेषु एकाद्येकोत्तराणामंकानां यथास्वपक्षसंयोजनेन यथोक्तं लघुखण्डकेन च लब्धं पृथक् संकलितम्।

यथा सं० ।55।210।465।820।1275।1830।2485।3240।4095।5050। एतेभ्यः पदानि तान्येव दशादीनि। तत्रैकाद्येकोत्तराणामंकानां यथापक्षयोजनं प्रधानतरं व्यवकलितेनैतद्वियोजनीयम्। ते शिष्यस्य प्रयत्नतो दर्शयितव्ये येनांकानां योगवियोगौ जानाति। यत् संकलितेऽन्यत् करणसूत्रयुक्तं तत् पृथगंकयोजनावाप्तवित्तस्य प्रत्ययार्थं लघुकर्मार्थं च। एवं संकलितं समाप्तम्।।

सुक्षेमा अनुवाद-1 से लेकर 10 तक क्रमिक संख्याओं का जोड़ तथा इस प्रकार क्रम से चलते हुए अन्त में 1 से लेकर 10×10 = 100 तक संख्या का जोड़ तथा इनसे प्राप्त पद भी शीघ्र बताओ।

अनुशीलन-व्याख्या में 1 से लेकर क्रमशः 10---20 आदि के संकलित तथा पद बताए गए हैं। अतः यहाँ पहले इन संख्याओं में सूत्र का प्रयोग करते हुए संकलित का निरूपण करते हैं-

संख्याएँ	संकलित के सूत्र अनुसार संक्रिया	संकलित (S)
1+2+3--+10	$\frac{10(10+1)}{2}$	= 55
1+2+3--+20	$\frac{20(20+1)}{2}$	= 210
1+2+3--+30	$\frac{30(30+1)}{2}$	= 465
1+2+3--+40	$\frac{40(40+1)}{2}$	= 820
1+2+3--+50	$\frac{50(50+1)}{2}$	= 1275
1+2+3--+60	$\frac{60(60+1)}{2}$	= 1830

1+2+3--+70	$\frac{70 (70+1)}{2}$	= 2485
1+2+3--+80	$\frac{80 (80+1)}{2}$	= 3240
1+2+3--+90	$\frac{90 (90+1)}{2}$	= 4095
1+2+3--+100	$\frac{100 (100+1)}{2}$	= 5050

इसके पश्चात् पूर्वोक्त सूत्रों के अनुसार संकलित से पद (n) प्राप्त करने के लिये चित्र प्रदर्शित करते हैं–

संकलित (S)	पद प्राप्ति के प्रथम सूत्र के अनुसार संक्रिया	पद प्राप्ति के द्वितीय सूत्र के अनुसार संक्रिया			पद या अन्तिम संख्या (n)
55	110-100	$\frac{\sqrt{8\times55+1}-1}{2}$	$=\frac{\sqrt{441}-1}{2}$	$=\frac{21-1}{2}$	= 10
210	420-400	$\frac{\sqrt{8\times210+1}-1}{2}$	$=\frac{\sqrt{1681}-1}{2}$	$=\frac{41-1}{2}$	= 20
465	930-900	$\frac{\sqrt{8\times465+1}-1}{2}$	$=\frac{\sqrt{3721}-1}{2}$	$=\frac{61-1}{2}$	= 30
820	1640-1600	$\frac{\sqrt{8\times820+1}-1}{2}$	$=\frac{\sqrt{6561}-1}{2}$	$=\frac{81-1}{2}$	= 40
1275	2550-2500	$\frac{\sqrt{8\times1275+1}-1}{2}$	$=\frac{\sqrt{10201}-1}{2}$	$=\frac{101-1}{2}$	= 50
1830	3660-3600	$\frac{\sqrt{8\times1830+1}-1}{2}$	$=\frac{\sqrt{14641}-1}{2}$	$=\frac{121-1}{2}$	= 60
2485	4970-4900	$\frac{\sqrt{8\times2485+1}-1}{2}$	$=\frac{\sqrt{19881}-1}{2}$	$=\frac{141-1}{2}$	= 70
3240	6480-6400	$\frac{\sqrt{8\times3240+1}-1}{2}$	$=\frac{\sqrt{25921}-1}{2}$	$=\frac{161-1}{2}$	= 80

4095 8190-8100 $\frac{\sqrt{8\times4095+1}-1}{2} = \frac{\sqrt{32761}-1}{2} = \frac{181-1}{2} = 90$

5050 10100-10000 $\frac{\sqrt{8\times5050+1}-1}{2} = \frac{\sqrt{40401}-1}{2} = \frac{201-1}{2} = 100$

सैकं व्यवकलितपदं संकलितपदे निधाय संगुणयेत्।
पदयोर्विवरेण भवेद् दलीकृतं व्यवकलितशेषम्[१]।।३।।

सुक्षेमा अनुवाद-1 संख्या सहित व्यवकलित पद (m) को संकलित पद (n) के साथ जोड़कर योगफल को संकलित पद में से घटे हुए व्यवकलित पद के साथ गुणा करे। पुनः दो से विभक्त करे। इससे व्यवकलित-शेष प्राप्त होता है।

अनुशीलन-इस श्लोक में संकलित की गई बड़ी संख्या के पद (n) तथा ऐसी छोटी संख्या के पद (m) के परिज्ञान से बड़ी संख्या के संकलित में से छोटी संख्या के संकलित के व्यवकलन या घटाने की विधि बताई गई है। सूत्र में (n) पद को संकलित पद तथा इसमें से घटाए जाने वाले m पद को व्यवकलित पद कहा है।

जैसे 1+2---+100 के पद (n) 100 होंगे तथा 1+2---+10 का पद (m) 10 होंगे। इस स्थिति में सूत्र का यह आकार प्राप्त होता है-

बड़ी संख्या के संकलित (Sn) - छोटी संख्या का संकलित (Sm) =
अथवा व्यवकलित शेष (D)= $\frac{(n-m)(n+m+1)}{2}$

उदाहरण

Sn Sm D

$5050 - 55 = 4995 \Rightarrow \frac{90\times111}{2} = 4995$

सूत्र की उपपत्ति इस प्रकार है-

पूर्वसूत्रानुसार I बड़ी संख्या का संकलित $= \frac{n^2+n}{2}$

II छोटी संख्या का संकलित $= \frac{m^2+m}{2}$

---

१. तुल. पाटी-गणित सू. 16,

$$\therefore \text{I-II} = \frac{n^2 - m^2 + n - m}{2}$$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ इस सर्वसमिका के अनुसार–

$$\text{I-II} = \frac{(n+m)(n-m) + n - m}{2}$$

$$\Rightarrow \text{I-II} = \frac{(n-m)(n+m+1)}{2}$$

उदाहरण

1+2---+100 का संकलित $= \frac{10000+100}{2} = 5050$

1+2---+10 का संकलित $= \frac{100+10}{2} = 55$

5050-55 $= \frac{10000-100+100-10}{2} = 4995$

5050-55 $= \frac{(100-10)(100+10+1)}{2} = 4995$

इस प्रकार हमने स्पष्टत: वही सूत्र प्राप्त कर लिया है, जिसका उल्लेख ऊपर किया गया है। त्रिशतिकाकार ने उक्त सर्वसमिका का यहाँ स्पष्ट उल्लेख नहीं किया है। पर क्योंकि इसके बिना सूत्र की उपपत्ति सम्भव नहीं है। अत: मानना होगा कि यह इस सूत्र में अन्तर्निहित है। प्राचीन गणित में यह सर्वसमिका 'वर्गान्तरं तु योगान्तरघातसमो भवति' इस वचन के अनुसार प्रसिद्ध रही है। इसे श्लोक 11 में भी संकेतित किया है।

संकलितपदोत्थधनात् त्यक्त्वा व्यवकलितशेषमवशिष्टात्।
द्वाभ्यां गुणितान्मूलं शेषसमं निर्दिशेद् गच्छम्।। ४।।

सुक्षेमा अनुवाद-संकलित पदों के संकलन से प्राप्त धन (Sn) से व्यवकलित-शेष (D) को घटाने पर प्राप्त संख्या को 2 से गुणित करके पद को घटाकर वर्गमूल लेने पर गच्छ अर्थात् छोटी संख्या के संकलित का पद (m) प्राप्त होता है। यह (पूर्वोक्त सूत्र 9 के समान) शेष संख्या के समतुल्य होता है।

इससे हमें यह सूत्र प्राप्त होता है–

छोटी संख्या के संकलित का पद (m) = $\sqrt{2\,(Sn\text{-}D)\text{ -}m}$

उदाहरण ⇒ $10 = \sqrt{2\,(5050\text{-}4995)\text{ - }10}$

⇒ $\sqrt{110\text{-}10} = 10$

स्पष्टत: यह पूर्वोक्त श्लोक 1 में वर्णित सूत्र $\sqrt{2S\text{-}n}$ से सर्वथा अभिन्न है। संक्रिया का परिणाम भी ठीक वही है। अत: इसके समतुल्य सूत्र भी यहाँ लागू है। अत: यहाँ भी पूर्वोक्त श्लोक के अनुसार 'शेष-समम्' कहा है। इस प्रकार वहाँ वर्णित उपपत्ति से इसकी उपपत्ति भी गतार्थ है।

उदाहरणानि

एकादिदशान्तानां दशगुणितानां शतस्य संकलितात्।
एकाद्येकचयेन व्यवकलिते किं पृथक् शेषम्[१]।। २।।

न्यास: ।।10 ।20 ।30 ।40 ।50 ।60 ।70 ।80 ।90 ।100 ।। शतस्य संकलितादस्मात् 5050 एकाद्येकोत्तराणामंकानां यथास्वपक्षविशोधनेन च लब्धं पृथक् व्यवकलितशेषम् 4995 ।4840 ।4585 ।4230 ।3775 ।3220 ।2565 ।1810 ।955 ।0 एतेभ्यो व्यवकलितपदानि तान्येव दशादीनि। एवं व्यवकलितं समाप्तम्।

सुक्षेमा अनुवाद-1 से लेकर 10 तक का क्रमश: दशगुणित (10×2, 10×3) संख्याओं के चय या समूह के संकलित को 100 के संकलित में से घटाने पर व्यवकलित शेष क्या बचेगा।

अनुशीलन-यहाँ पिछले चार्ट के अनुसार 1+2+3---+100 का संकलित 5050 है। यह बड़ी संख्या के पद n का संकलित Sn है। इसी प्रकार छोटी संख्या 1+2+3---10 का संकलित 55 है। यह छोटी संख्या के पद m (व्य. प.) का संकलित Sm कहा जायेगा। यहाँ बड़ी संख्या के संकलित 5050 में से छोटी संख्या के संकलित 55 का व्यवकलन उक्त सूत्र के साथ ही स्पष्ट किया जा चुका है।

पूर्वोक्त सूत्र के अनुसार 10 से आगे के सभी दशयोगोत्तर संख्याओं के व्यवकलित शेष को प्रस्तुत सूत्र का उपयोग करते हुए चार्ट में प्रस्तुत करते हैं–

बड़ी संख्या के संकलित से छोटी संख्या के संकलित का व्यवकलन-	प्रस्तुत सूत्र के अनुसार संक्रिया-	व्यवकलन परिणाम

1+2---100 के संकलित -1+2---+20 का संकलित

$$\Rightarrow \frac{(100\text{-}20)\,(100+20+1)}{2} = \frac{9680}{2} = 4840$$

---

१. तुल. पाटी-गणित उदा. 2

1+2---100 के संकलित -1+2---+30 का संकलित

$$\Rightarrow \frac{(100-30)(100+30+1)}{2} = \frac{9170}{2} = 4585$$

1+2---+100 के संकलित -1+2---+40 का संकलित

$$\Rightarrow \frac{(100-40)(100+40+1)}{2} = \frac{8460}{2} = 4230$$

1+2---+100 के संकलित -1+2---+50 का संकलित

$$\Rightarrow \frac{(100-50)(100+50+1)}{2} = \frac{7550}{2} = 3775$$

1+2---+100 के संकलित -1+2---+60 का संकलित

$$\Rightarrow \frac{(100-60)(100+60+1)}{2} = \frac{6440}{2} = 3220$$

1+2---+100 के संकलित -1+2---+70 का संकलित

$$\Rightarrow \frac{(100-70)(100+70+1)}{2} = \frac{5130}{2} = 2565$$

1+2---+100 के संकलित -1+2---+80 का संकलित

$$\Rightarrow \frac{(100-80)(100+80+1)}{2} = \frac{3620}{2} = 1810$$

1+2---+100 के संकलित -1+2---+90 का संकलित

$$\Rightarrow \frac{(100-90)(100+90+1)}{2} = \frac{1910}{2} = 955$$

1+2---+100 के संकलित -1+2---+100 का संकलित

$$\Rightarrow \frac{(100-100)(100+100+1)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

प्रत्युत्पन्ने करणसूत्रमार्याचतुष्टयम्

विन्यस्याधो गुण्यं कपाटसन्धिक्रमेण गुणराशेः।
गुणयेद् विलोमगत्याऽनुलोममार्गेण वा क्रमशः।। ५।।

उत्सार्योत्सार्य ततः कपाटसन्धिर्भवेदिदं करणम्।
तस्मिंस्तिष्ठति यस्मात् प्रत्युत्पन्नस्ततस्तत्स्थः[१]।। ६।।

---

१. तुल. पाटी-गणित सू. 18, 19

सुक्षेमा अनुवाद-गुण्य को (गुणक के) नीचे रखकर विलोम गति से या अनुलोम मार्ग से कपाट सन्धि क्रम से एक-एक करके क्रमशः गुणा करें। इस क्रम में प्रत्येक बार गुणक को खिसकाते हुए जिस जिससे गुणा किया गया है, उसमें गुणन ठहरता है। इस प्रकार इसके कपाटसन्धि तथा तत्स्थ ये दो भेद होते हैं।

अनुशीलन-यहाँ 'प्रत्युत्पन्न' शब्द से गुणन की विधि बताई गई है। पाटी में गुणक को बार-२ खिसका कर गुणक के इकाई अंक के ठीक नीचे रखने की क्रिया के कारण इसका कपाट सन्धि नाम दिया गया है।

रूपस्थानविभागाद् द्विधा भवेत् खण्डसंज्ञकं करणम्।
प्रत्युत्पन्नविधाने करणान्येतानि चत्वारि[१]।। ७।।

क्षेपसमं खं योगे राशिरविकृतः खयोजनापगमे
खस्य गुणनादिके खं, संगुणने खेन च खमेव[२]।। ८।।

सुक्षेमा अनुवाद-गुणन की 'खण्ड' संज्ञक विधि 'रूप विभाग' तथा 'स्थान विभाग' के भेद से दो प्रकार की होती है। प्रत्युत्पन्न या गुणन के विधान में ये 4 प्रकार के करण या भेद होते हैं। (I) शून्य के साथ किसी राशि को जोड़ने पर योगफल उस क्षेप राशि के बराबर होता है। (II) किसी राशि के साथ शून्य को जोड़ने या उसमें से शून्य को निकालने पर वह राशि अविकृत या जैसी तैसी बनी रहती है। (III) शून्य को किसी राशि से गुणित करने पर या 'आदि' पद के अनुसार भाग, वर्ग, घन करने पर उनका फल 'ख' अर्थात् शून्य हो जाता है। (IV) शून्य से किसी राशि को गुणित करने पर गुणनफल शून्य ही होता है।

अनुशीलन-इस प्रसंग में शून्य के साथ विविध संख्याओं के होने पर गणितीय संक्रियाओं के परिणाम बताए गए हैं। ये परिणाम इस प्रकार प्रकट किये जा सकते हैं-

प्रथम नियम के अनुसार $\Rightarrow 0+a = a$

द्वितीय नियम के अनुसार $\Rightarrow a \pm 0 = a$

तृतीय नियम के अनुसार $\Rightarrow 0 \times a = 0$

चतुर्थ नियम के अनुसार $\Rightarrow a \times 0 = 0$

तृतीय नियम के 'आदि' पद के अनुसार $\Rightarrow 0^2 = \sqrt{0}, o^3 = \sqrt[3]{0} = 0$

साथ ही 'आदि' पद के अनुसार $\Rightarrow 0/a = 0$

---

१. तुल. पाटी-गणित सू. 20, ग.सा.सं. 2.1 गणित तिलक पृ. 4 -5 गणित कौमुदी पृ. 4
२. तुल. पाटी-गणित सू. 21, ग.सा.सं. 1.49 महासिद्धान्त 5.10

यह ध्यान देने योग्य है कि तृतीय तथा चतुर्थ नियम के अनुसार गुणन की दो स्थितियों की परिकल्पना की गई है तथा दोनों का परिणाम 0 बताया गया है। आधुनिक गणित में दोनों मान्य हैं तथा इन्हें सिद्ध भी किया जा सकता है–

$0 \times a = 0$ सही है, क्योंकि $0/a = 0$

इसके सही सिद्ध होने पर गुणन में क्रम-विनिमेय गुण लागू होने के कारण $a \times 0 = 0$ भी सही सिद्ध होता है।

इस प्रकार शून्य को किसी राशि से भाग करने पर उसका फल भी शून्य होता है। यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि शून्य से किसी राशि को भाग देने से उसके भागफल के विषय में सावधानीपूर्वक कुछ नहीं कहा है। इस प्रकार उन्होंने $a/0$ के अपरिभाष्य होने का संकेत दिया है। आधुनिक गणित में इसे अपरिभाष्य मानते हुए इस संक्रिया का प्रतिषेध किया जाता है[१]। क्योंकि यह एक गलत परिणाम की ओर अग्रसर करती है। उदाहरणतः, यदि $5/0 = 0$ हो तो उसका अर्थ यह होना चाहिए कि $0 \times 0 = 5$, जो कि सर्वथा गलत है। सभी प्राचीन या अद्यतन विद्वान् 0×0 या $0^2 = 0$ ही मानते हैं। इस प्रकार त्रिशतिकाकार के मत से भी यह संक्रिया अपरिभाष्य है।

उदाहरणानि

षण्णवतिद्विकमेकं चैकद्विगुणानि षण्णवाष्टौ च।
सप्तत्रिगुणान् पञ्चषट्खाष्टौ च कुरु षष्टिगुणान्।। ३।।

न्यासः । गुण्यः 1296। गुणकः 21। गुण्यः 896। गुणकः 37। गुण्यः 8065। गुणकः 60। लब्धं यथाक्रमम् 27216। 33152। 483900।।

सुक्षेमा अनुवाद-1296 को 21 से, 896 को 37 से 8065 को 60 से गुणित करो।

इनका गुणनफल उक्त व्याख्या में ही अंकित कर दिया गया है।

अन्यदुदाहरणम्

एकादिनवान्तानि त्रिपञ्चसप्ताहतानि कथय।
त्र्यादिषडन्तानि तथा द्विशून्यसप्ताष्टगुणितानि।। ४।।

न्यासः।। गुण्यः 987654321। गुणकः 753। गुण्यः 6543। गुणकः 8702। लब्धं यथाक्रमम् 743703703713। 56937186। एवं प्रत्युत्पन्नः समाप्तः।

१. Division by zero is prohibited, for this operation is undefined. - Scientific Encyclopedia, U.S.A. on the word `zero'

सुक्षेमा अनुवाद-1 से लेकर 9 तक (इकाई दहाई के क्रम से स्थानीय मान के अनुसार लिखी संख्याओं) को 753 से गुणा करने पर तथा 3 से 6 तक उसी क्रम से लिखी संख्याओं को 8702 से गुणित करने पर गुणनफल क्या होगा। बताओ।

गुणनफल व्याख्या में अंकित कर दिया गया हैं।

भागहारे करणसूत्रम्

तुल्येन सम्भवे सति हरं विभाज्यं च राशिना छित्त्वा।
भागो हार्यः क्रमशः प्रतिलोमं भागहारविधिः[१]।। ९।।

प्राग्लब्धप्रत्युत्पन्नफलानां स्वगुणभक्तानां न्यासः।।

भाज्यः 27216। भाजकः 21। लब्धिः 1296। भाज्यः 33152। भाजकः 37। लब्धिः 896। भाज्यः 483900। भाजकः 60। लब्धिः 8065। भाज्यः 743703703713। भाजकः 753। लब्धिः 987654321 भाज्यः 56937186 भाजकः 8702 लब्धिः 6543। एवं भागहारः समाप्तः।

सुक्षेमा अनुवाद-यदि सम्भव हो तो हर या भाजक तथा भाज्य दोनों को किसी तुल्य या समान राशि से विभाजित करके भाज्य को भाजक की उस पहली राशि से विभाजित करके भाजक की लब्धि से भाज्य की लब्धि को भाग देते हुए हार्य या विभाज्य बनाने पर तो प्रतिलोम भागहार विधि होती है।

अनुशीलन-भाग की यह संक्रिया निम्न चरणों में प्रकट की जा सकती है-

यदि यह सम्भव हो कि-

भाज्य $\div$ a तथा भाजक = $a \times b$

तो-

(I) भाज्य $\div$ a तथा भाजक $\div$ a

(II) भाज्य की लब्धि $\div$ भाजक की लब्धि (b) = भाज्य $\div$ भाजक

उदाहरण के लिये जिन संख्याओं को पहले गुणित किया गया है, उनके गुणनफल को भाग के लिये प्रस्तुत करते हैं। जैसे-

$27216 \div 21$, $\qquad 21 = 7 \times 3$

अतः $27216 \div 7 = 3888$ तथा $21 \div 7 = 3$

$3888 \div 3 = 1296$ अतः $27216 \div 21 = 1296$

---

१. पाटी-गणित सू. 22, ग.सा.सं. 1.49

वर्गे करणसूत्रमार्याद्वयम्

कृत्वान्त्यपदस्य कृतिं शेषपदाद् द्विगुणमन्त्यमभिहन्यात्।
उत्सार्योत्सार्य पदाच्छेषं चोत्सारयेत् कृतये।। १०।।

सदृशद्विराशिघातो, रूपादिद्विचयपदसमासो वा।
इष्टोनयुतवधो वा तदिष्टवर्गान्वितो वर्गः।। ११।।

सुक्षेमा अनुवाद-'कृति' अर्थात् वर्ग करने के लिये संख्या के अन्तिम पद (सबसे बाएँ ओर) का वर्ग करके शेष पद से द्विगुण अन्तिम पद को गुणित करे। इस प्रकार क्रमशः अन्तिम पद (a) को छोड़ते हुए आगे वाले शेष पद (b) के साथ वही पूर्वोक्त किया करने से सम्पूर्ण संख्या का वर्ग प्राप्त होता है।

अनुशीलन-उदाहरणतः 34 संख्या के वर्ग के लिये-

अन्तिम संख्या 3 का वर्ग	9
शेष पद 4 से द्विगुणित अन्तिम (3) का गुणन	24
शेष पद 4 से पूर्वोक्त किया वर्ग	16
	1156

प्राचीन गणित की यह विधि $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ की सर्वसमिका पर आधारित है। पूर्वोक्त उदाहरण में वस्तुतः 900+240+16 यही संक्रिया की गई है।

वर्ग का अर्थ- I. 'सदृशद्विराशिघातः'- समान दो संख्याओं का आपस में गुणित करना ही वर्ग है[1]।

II. रूपादिद्विचयपदसमासो वा-रूप अर्थात् 1 से प्रारम्भ करके उसमें क्रमशः 2 से युक्त चय या समूह को जोड़ते हुए प्राप्त क्रमिक संख्याओं का जोड़ ही (उस पद संख्या का) वर्ग है।

III. इष्टोनयुतवधो वा---जिस संख्या का वर्ग करना है, उसमें से किसी इष्ट संख्या को घटावें तथा उसमें उसी को जोड़ें। पुनः प्राप्त संख्याओं को आपस में गुणित करें तथा गुणनफल में उस पूर्वोक्त इष्ट संख्या के वर्ग को जोड़े। यही उस पूर्वोक्त संख्या का वर्ग होता है[2]।

---

१. वर्ग का यह अर्थ तथा इसकी पूर्वोक्त रीति लीलावती से शब्दशः तुलनीय है-
समद्विघातः कृतिरुच्यतेऽथ स्थाप्योऽन्त्यवर्गो द्विगुणान्त्यनिघ्नाः।
स्वस्वोपरिष्टाच्च तथापरेङ्कास्त्यक्त्वाऽन्त्यमुत्सार्य पुनश्च राशिम्।।
लीलावती, अभिन्नपरिकर्माष्टक श्लोक 8
तुल. ब्रा.स्फु.सि. 12.63 ग.सा.सं. 2.29.31 ग.कौ.पृ. 6 ग.ति.पृ. 7।

२. तुल. इष्टोनयुग्राशिवधः कृतिः स्यादिष्टस्य वर्गेण समन्वितो वा - लीलावती, अभिन्नपरिकर्माष्टकम् श्लोक 9, पृ. 22

11वें श्लोक के प्रथम उपभेद में वर्ग की सुन्दर परिभाषा दी गई है।

द्वितीय उपभेद से वर्ग का यह महत्त्वपूर्ण नियम प्राप्त होता है– '1 से लेकर क्रमिक धनात्मक विषम संख्याओं का जोड़ उन पदों की गिनती का वर्ग होता है'। जैसे–

$1+3+5+7+9 = 5^2$ क्योंकि यहाँ 5 पद हैं। अत: इनका जोड़ 5 का वर्ग है।

इस नियम से हमें यह सूत्र प्राप्त होता है–

1 से क्रमिक विषम संख्याओं का योग = पदों की संख्या^{2} या n^2

अथवा $\left(\frac{\text{अन्तिम विषम संख्या} + 1}{2}\right)^2$

इसकी उपपत्ति के लिये संक्षेप शब्द–

सबसे पहली संख्या आदिधन (a)

संख्याओं का सामान्य अन्तर, चय, Common difference=d

1 आदि क्रमिक संख्याओं के सर्वधन का सामान्य सूत्र $\Rightarrow \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

1+3+5+7+9-- में 2 के अन्तर से क्रमिक संख्याओं के योग की स्थिति में $a = 1, d = 2$ अत: इस स्थिति में–

$$1+3+5----+n = \frac{n\{2+(n-1)\times 2\}}{2} \qquad \frac{5\{2+(5-1)\times 2\}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{n(2+2n-2)}{2} \qquad \Rightarrow \frac{5(2+10-2)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}\times 2n \Rightarrow n^2 \qquad \Rightarrow \frac{5\times 10}{2} = \frac{50}{2} = 25 = 5^2$$

तृतीय उपभेद की उपपत्ति प्राचीन गणित में प्रचलित एक प्रसिद्ध नियम 'वर्गान्तरं तु योगान्तरघातसमो भवति' से प्राप्त होती है। इसका अर्थ यह है किन्हीं दो संख्याओं के वर्ग का अन्तर ⇒ उन संख्याओं के योग उन्हीं संख्याओं के घटाव के पश्चात् उन दोनों प्राप्त संख्याओं के गुणनफल के समतुल्य होता है। इससे हमें गणितशास्त्र में प्रसिद्ध यह सर्वसमिका प्राप्त होती है–

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

इस आधार पर प्रस्तुत तृतीय उपभेद के लिये यह सूत्र अनायास प्राप्त होता है–

$a^2 = (a+b)(a-b) + b^2$

उदाहरणम्

एकादिनवान्तानां पञ्चकृतेस्त्रिषष्टेश्च।
द्वित्रिचतुर्णां च कृतिं वद द्विशून्याष्टसप्तानाम्[१]।। ५।।

न्यासः।। 1 ।2 ।3 ।4 ।5 ।6 ।7 ।8 ।9 ।25 ।36 ।63 ।432 ।7802। लब्धा यथाक्रमं वर्गराशयः 1 ।4 ।9 ।16 ।25 ।36 ।49 ।64 ।81 ।625 ।1296 ।3969 ।186624 । 60871204। इति वर्गः।।

सुक्षेमा अनुवाद-1 से लेकर 9 तक तथा 5 की कृति या वर्ग अर्थात् 25, 63, 432 तथा 7802 के वर्ग बताओ।

अनुशीलन-1 से 9 तक वर्ग स्पष्ट हैं। अतः 25 से आगे प्रथम उपभेद के अनुसार वर्ग प्रस्तुत करते हैं–

वर्ग के प्रथम सूत्र के अनुसार 432 के वर्ग को प्राचीन लेखन पद्धति के अनुसार प्रस्तुत करते हैं–

$$
\begin{aligned}
43^2 &= 1849 \\
2\times43\times2 &= 172 \\
2^2 &= 4 \\
\hline
 & 186624
\end{aligned}
$$

यह विधि द्विपद के वर्ग की सर्वसमिका पर अवलम्बित है। अथवा इसे त्रिपद बनाकर प्राचीन विधि को अन्वित करते हैं–

$$
\begin{aligned}
432^2 = 4^2 &= 16 \\
2\times4\times3 &= 24 \\
3^2 &= 9 \\
2\times43\times2 &= 172 \\
2^2 &= 4 \\
\hline
 & 186624
\end{aligned}
$$

यह विधि $(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$ इस सर्वसमिका पर आधारित है। आगे चल कर भास्कराचार्य आदि ने इसका स्पष्ट वर्णन किया है।

१. तुल. पाटी-गणित उदा. 4

आगे तृतीय उपभेद के अनुसार इनका वर्ग प्रस्तुत करते हैं–

संख्या	तृतीय उपभेद के सूत्र के अनुसार संक्रिया		प्राप्त परिणाम
25^2	$(25+5)(25-5)+5^2$	$=30\times20+25$	$=625$
36^2	$(36+4)(36-4)+4^2$	$=40\times32+16$	$=1296$
63^2	$(63+7)(63-7)+7^2$	$=70\times56+49$	$=3969$
432^2	$(432+32)(432-32)+32^2$	$=464\times400+1024$	$=186624$
7802^2	$(7802+802)(7802-802)+802^2$	$=8604\times7000+643204$	$=60871204$

वर्गमूले करणसूत्रमार्याद्वयम्

विषमात् पदतस्त्यक्त्वा वर्गं स्थानच्युतेन मूलेन।
द्विगुणेन भजेच्छेषं लब्धं विनिवेशयेत् पंक्त्याम्।। १२।।
तद्वर्गं संशोध्य द्विगुणीकुर्वीत पूर्वलब्धं यत्।
उत्सार्य ततो विभजेच्छेषं द्विगुणीकृतं दलयेत्[१]।। १३।।

उदाहरणम्

प्राग्लब्धवर्णानां न्यासः।। 1 ।4 ।9 ।16 ।25 ।36 ।49 ।64 ।81 ।625 ।1296 ।3969 । 186624 ।60871204।। लब्धमेतेषां मूलम् 1 ।2 ।3 ।4 ।5 ।6 ।7 ।8 ।9 ।25 ।36 ।63 । 432 ।7802। इति वर्गमूलम्।।

सुक्षेमा अनुवाद-अन्तिम विषम स्थान वाले अंक (सबसे बाईं ओर का) में से (महत्तम सम्भव) वर्ग संख्या को घटाकर उस वर्ग की वर्गमूल संख्या को दूना करके सम अंक में भाग दें। पुनः लब्धि को द्विगुणीकृत वर्गमूल वाली पंक्ति में स्थापित करें। पुनः उस लब्धि के वर्ग को अगली संख्या से संशोधित करें या घटावें। इस प्रकार जब तक संख्या समाप्त न हो तब तक भाग आदि की क्रिया करने से वर्गमूल प्राप्त होता है।

इससे पूर्व जिन संख्याओं का वर्ग किया गया है, उन्हीं संख्याओं का वर्गमूल इस विधि के द्वारा प्रस्तुत किया गया है। पुनरपि 186624 का वर्गमूल इस विधि से प्रस्तुत करते हैं–

---

१. तुल. पाटी-गणित सू. 25-26। ग.सा.सं. 2.36, ग.कौ.पू. 9, म.सि. 15.6 लीलावती अभिन्नपरिकर्माष्टक श्लोक 10

पहले संख्या के ऊपर सम (-) विषम (।) चिह्न लगाते हैं। इससे जितने जोड़े बनेंगे, वर्गमूल में उतने ही अंक प्राप्त होंगे–

```
          - | - | - |
          1 8 6 6 2 4
4²        16
          ----
           26
2×4×3      24
          ----
           26
3²          9
          ----
           172
2×43×2     172
          ----
             4
2²           4
          ----
           ×
```

स्पष्टत: यहाँ उपरिलिखित वर्ग की विलोम संक्रिया की गई है।

घने करणसूत्रमार्याद्वयम्

स्थाप्योऽन्त्यघनोऽन्त्यकृतिः स्थानाधिक्यं त्रिपूर्वगुणिता च।
आद्यकृतिरन्त्यगुणिता त्रिगुणा च घनस्तथाद्यस्य।। १४।।
निर्युक्तराशिरन्त्यस्तथा घनोऽसौ समत्रिराशिहतिः।
खैकादिचयेनान्त्ये त्र्यादिहते वा युतिः सैके[१]।। १५।।

सुक्षेमा अनुवाद-किसी संख्या का घन प्राप्त करने के लिये पहले अन्तिम संख्या (सबसे बाईं ओर वाली) का घन करें। इसके पश्चात् उसी संख्या का वर्ग तथा उसे त्रिगुणित करें तथा इससे आगे वाली संख्या से गुणित करें। पुन: इस आगे वाली संख्या के वर्ग को अन्तिम संख्या से गुणित तथा 3 से गुणित करें। इसके पश्चात् आगे वाली संख्या का घन करें। इन्हें स्थानान्तर से लिखकर जोड़ने से घन प्राप्त होता है।

---

१. पाटी-गणित सू. 27-28, ब्रा.स्फु.सि. 12.6, ग.सा.सं. 2.47, ग.ति.पृ. 11, ग.कौ.पृ. 7-8, लीलावती

अनुशीलन-संख्याओं के घन की यह विधि मूलतः ब्रह्मगुप्त ने विनिर्दिष्ट की है[१]।

घन की यह प्रथम प्राचीन विधि स्पष्टतः द्विपद के घन की इस सर्वसमिका पर अवलम्बित है–

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3a\,b^2+b^3$$

घन की परिभाषा–घनोऽसौ समत्रिराशिहतिः- घन का अर्थ 3 समान संख्याओं का आपस में गुणन करना है। इसमें वह (बाईं ओर) निर्दिष्ट संख्या 'निर्युक्तराशि' है।[२] इसे 'अन्त्य' नाम दिया गया है। इसके अनुसार घन का सूत्र इस प्रकार है–

$$a^3 = a \times a \times a$$

घन का अन्य प्रकार–खैकादिचयेना---घन की विधि यह है कि अन्त्य या निर्दिष्ट राशि (a) में 'खैकादिचय' अर्थात् 0+1+2 = 3 से अथवा 'त्र्यादि' अर्थात् 3 तथा आदि अर्थात् निर्दिष्ट राशि वाले अंक से पहले वाले याने उपान्तिम अंक (a-1) से गुणा करे, उसमें 1 जोड़े। पुनः उसमें 'स्वाद्यंकघन' (यह अध्याहृत है) अर्थात् उपान्तिम अंक के घन $(a-1)^3$ को जोड़े। इससे घन प्राप्त होता है।[३]

इस नियम के अनुसार हमें घन के लिये यह सूत्र प्राप्त होता है–

$$a^3 = (a-1)^3 + 3a\,(a-1) +1$$

यह सूत्र गणित शास्त्र की निम्न प्रसिद्ध सर्वसमिका से इस प्रकार प्राप्त होता है–

$$a^3-b^3 = (a-b)\,(a^2+ab+b^2)$$

$$\Rightarrow a^3-1 = (a-1)\,(a^2+a+1)$$

$$\Rightarrow a^3 = (a-1)\,(a^2+a+1) +1$$

$$\Rightarrow (a-1)\,(a^2-2a+1+a+2a) +1$$

$$\Rightarrow (a-1)\,\{(a-1)^2 + 3a\} +1$$

$$\Rightarrow a^3 = (a-1)^3 + 3a\,(a-1) +1$$

---

१. स्थाप्योऽन्त्यघनोऽन्त्यस्य कृतिस्त्रिगुणोत्तरसंगुणा च तत्प्रथमात्।
उत्तरकृतिरन्त्यगुणा त्रिगुणा चोत्तरघनश्च घनः।। - ब्रा.स्फु.सि. 12.6

२. निर्युक्त-राशिर्निर्दिष्टराशिः-प्रस्तुत श्लोक पर पं० सुधाकर द्विवेदी की टिप्पणी।

३. तस्मिन्नन्त्ये त्र्यादिहते = त्रिभिः स्वाद्यंकेन च हते ततः सैके = एकेन सहिते। अस्मिन् युतिर्योगः कार्यः। स्वाद्यंकघनस्य इत्यध्याहार्यम्-प्रस्तुत श्लोक पर पं० सुधाकर द्विवेदी की टिप्पणी।

इस विधि से हमने पूर्वोक्त सूत्र पुनः प्राप्त कर लिया है। इससे $(a+b)^3$ इस द्विपद के घन के लिये भी समकक्ष सूत्र प्राप्त किया जा सकता है। पर वहाँ b का अर्थ केवल 1 होगा। अतः a = कोई संख्या, b = 1 मानकर समकक्ष सूत्र इस प्रकार है–

$(a+b)^3 \quad = a^3+3a\,(a+b) + b$

[नोट ⇒ b = 1]

आगे चलकर भास्कराचार्य ने इस सूत्र के आधार पर b = किसी भी संख्या मानते हुए $(a+b)^3$ के लिये सूत्र विकसित किया[१], जिसके अनुरूप आधुनिक गणित में $(a+b)^3 = a^3+3ab\,(a+b) + b^3$ सूत्र पर्याप्त प्रसिद्ध है।

उदाहरणम्

एकस्य नवानां पञ्चदशानां को घनो भवति।
षट्पञ्चद्विकराशेस्त्रिखद्विराशेश्च कथयाशु[२]।। ६।।

न्यासः।। 1 ।9 ।15 ।203 ।256। जाता यथाक्रमं घनाः।1 ।729 ।3375। 8365427 ।16777216। इति घनः।

सुक्षेमा अनुवाद–1, 9, 15 का तथा 203, 256 का घन क्या होता है, शीघ्र बताओ।

अनुशीलन–प्राप्त सूत्र के अनुसार 9 संख्या का घन इस प्रकार प्राप्त होगा–

सूत्र	उदाहरण
$a^3 = (a-1)^3 + 3a\,(a-1) + 1$	$9^3 = (9-1)^3 + (3\times9\times8) + 1$
	$\Rightarrow 512+216+1 = 729$

द्विपद के घन के सूत्र के अनुसार– (b=1)

$(a+b)^3 = a^3 +3a\,(a+b) + b$	$(8+1)^3 = 8^3+(3\times8\times9) + 1$
	$\Rightarrow 512+216+1 = 729$

इससे यह भी स्पष्ट है कि $9^3 = (7^3) + (3\times8\times7) + 1+217$ अर्थात् 343+169+217 = 729 अथवा $9^3 = (6^3) + (3\times7\times6) +1+217+169$ = अर्थात् 216+127+217+169=729 इस प्रकार श्रेणी अनुक्रम से समीकरण प्राप्त होते हैं।

१. खण्डाभ्यां वा हतो राशिस्त्रिघ्नः खण्डघनैक्ययुक्। - लीलावती श्लोक 13

२. तुल. पाटी-गणित उदा. 5

अन्य उदाहरणों का प्रथम सूत्र के अनुसार घन इस प्रकार है–

घन प्रस्तुत सूत्र के अनुसार संक्रिया प्राप्त परिणाम

$15^3=(10+5)^3=10^3+3\times10^2\times5+3\times10\times5^2+5^3$

$\Rightarrow 1000+1500+750+125 \quad =3375$

$203^3 = (200+3)^3=200^3+3\times200^2\times3+3\times200\times3^2+3^3$

$\Rightarrow 8000000+360000+5400+27 \quad =8365427$

$256^3=(250+6)^3=250^3+3\times250^2\times6+3\times250\times6^2+6^3$

$\Rightarrow 15625000+1125000+27000+216=16777216$

प्राचीन गणित में इस विधि को लिखने का प्रकार भिन्न था। उदाहरणत: 256^3 के लिये इस विधि को इस प्रकार लिखा जाता था–

$256^3=25^3 \quad =15625$

$3\times25^2\times6 \quad = 11250$

$3\times25\times6^2 \quad = 2700$

$6^3 \quad = 216$

16777216

इन उदाहरणों का द्वितीय सूत्र के अनुसार घन इस प्रकार है–

$15^3 \quad 14^3+ (3\times15\times14) +1$

$= 2744+630+1 \quad = 3375$

$203^3 \quad 202^3+ (3\times203\times202) +1$

$= 8242408+123018+1 \quad = 8365427$

$256^3 \quad = 255^3+ (3\times256\times255) +1$

$= 16581375+195840+1 \quad = 16777216$

घनमूले करणसूत्रमार्यात्रयम्

घनपदमघनपदे द्वे घनपदतोऽपास्य घनमतो मूलम्।
संयोज्य तृतीयपदस्याधस्तदनष्टवर्गेण।। १६।।
एकस्थानेन तथा शेषं त्रिगुणेन सम्भजेत् तस्मात्।
लब्धिं निवेश्य पङ्क्त्यां तद्वर्गं त्रिगुणमन्त्यहतम्।। १७।।
जह्यादुपरिगराशेः प्राग्वद्घनमादिमस्य च स्वपदात्।
भूयस्तु तृतीयपदस्याध इत्यादि विधि मूलम्[१]।। १८।।

१. तुल. ब्रा.स्फु.सि. 12.7। पाटी-गणित सू. 29-31, ग.सा.सं. 2.53-54 म.सि. 15.9-10, सि. शे. 13.6-7, ग.कौ.पृ. 8-9, लीलावती अभिन्नपरिकर्माष्टक श्लोक 14-15

उदाहरणम्

प्राग्लब्धघनानां न्यासः 1।729।3375।16777216।8365427। लब्धानि मूलानि 1।9।15।256।203। इति घनमूलम्।

सुक्षेमा अनुवाद-घनमूल के लिये पहले संख्या की इकाई में घन का चिह्न (।) तथा उससे पहले दो अंकों में अघन का चिह्न (--) लगावें। पुनः अन्तिम घन पद (सबसे बाईं ओर वाले) से अधिकतम सम्भव बड़े घन (a^3) को घटावें तथा उसे अन्तिम घन के नीचे रखें। पुनः आगे वाली शेष संख्या को त्रिगुणित घनमूल के वर्ग ($3a^2$) गुणित लब्धि (b) से भाग देवें। पश्चात् त्रिगुणित घनमूल तथा उस लब्धि के वर्ग ($3ab^2$) से भाग देवें तथा पूर्व के समान अन्तिम अघन में से घटावें। यही संक्रिया इसके तृतीय पद के साथ तथा उसके आगे भी करने से घनमूल प्राप्त होता है।

अनुशीलन-घनमूल की आधुनिक विधि में किसी संख्या के लघुतम संख्या से भाग करके भाजकों के एक ही प्रकार के 3-3 अंकों वाले समूह बन जाते हैं। इन समूहों में से एक-एक संख्या लेकर उनका गुणनफल ही उस संख्या का घनमूल होता है। उदाहरण में पूर्वोक्त घन संख्याओं का ही घनमूल बताया गया है।

पूर्वोक्त विधि का अनुसरण करते हुए 16777216 का घनमूल सिद्ध करते हैं–

	- । - - । - - ।
	1 6 7 7 7 2 1 6
2^3	8
	87
$3\times2^2\times5$	60
	277
$3\times2\times5^2$	150
	1277
5^3	125
	11522
$3\times25^2\times6$	11250

	2721
$3 \times 25 \times 6^2$	2700
	216
6^3	216
	×

यहाँ भी घन की पूर्वोक्त संक्रिया से विलोम संक्रिया द्वारा घनमूल प्रप्त किया गया है। प्रस्तुत संक्रिया में घन की संख्याएँ ही घनमूल के अंक बनते हैं। अत: इसका घनमूल 256 है।

भिन्नसंकलिते करणसूत्रमार्यापूर्वाधम्।

सदृशच्छेदांशयुतिः छेदनमच्छेदनस्य रूपं स्यात्[१]।

भिन्न के योग के सूत्र के लिये श्लोकार्ध–

सुक्षेमा अनुवाद–समान छेद या हर बनाने के पश्चात् भागफल को अंश के साथ उतनी बार जोड़ने से भिन्न संख्याओं का योग होता है। इससे सम्पूर्ण संख्याओं का एक हर बनता है।

उदाहरणम्

पादत्र्यंशषडंशान् द्वादशभागं च कथय संक्षिप्य।
सदलद्वि-पादवर्जितरूपत्रयं रूपषट्कं च[२]।। ७।।

न्यासः $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{12}$ अत्र छेदसादृश्यार्थं वक्ष्यमाणभागजातौ करणसूत्रम्।

छेदाभ्यामन्योन्यं हन्याच्छेदांशकौ समुच्छित्त्यै।

सदृशयोजनाल्लब्धम् $\frac{5}{6}$।

द्वितीयोदाहरणे न्यासः 2 3

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{6}{1}$ अत्रापि कलासवर्णनार्थं भागानुबन्धभागापवाहजातौ च करण-सूत्रम्।

भागानुबन्धजातौ रूपगुणच्छेदसंगुणः सांशः।
भागापवाहजातौ शोध्योंशच्छेदगुणितरूपेभ्यः।

एवं सवर्णनं छेदसादृश्यं च कृत्वा अंशयोजनाल्लब्धम् $\frac{45}{4}$ इति भिन्नसंकलितम्।।

---

१. तुल. ब्रा.स्फु.सि. 12.2, पाटी-गणित सू. 32, म.सि. 15.14 ग.ति.पृ. 15, सि.शे. 13.8

२. पाटी-गणित उदा. 6

सुक्षेमा अनुवाद-$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ तथा $\frac{1}{12}$ का योग बताओ तथा दल या अर्धसहित 2 अर्थात् $2\frac{1}{2}$ या $\frac{5}{2}$ पाद या चौथाई रहित 3 अर्थात् $3-\frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$ या $\frac{11}{4}$ तथा 6 या $\frac{6}{1}$ का जोड़ क्या होगा, बताओ।

अनुशीलन-यहाँ भिन्न संख्याओं के योग की विधि बताई है। इसके लिये पहला नियम यह है कि हर संख्याओं को समान बनाऐं। इसका प्रकार 'छेदाभ्यामन्योन्यं'---द्वारा व्याख्या में तथा आगे सूत्र 23 पृ. 27 में वर्णित है। इसके अनुसार छेद या हर को एक दूसरे से गुणा करने पर सदृशच्छेद बनता है। इसके पश्चात् प्रत्येक हर का इस सदृशच्छेद से या पूर्वोक्त गुणनफल से भाग देने पर तथा भागफल को अंश से गुणित करके प्राप्त संख्याओं के योग से भिन्न संख्याओं का योग होता है। जैसे पूर्वोक्त उदाहरण में हर संख्याओं का आपस में गुणन तथा प्रत्येक हर का गुणनफल से भाग तथा भागफल का अंश से गुणन से-

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{216+288+144+72}{864}$$

$$\frac{720}{864} \frac{\div 144}{\div 144} = \frac{5}{6}$$

हम जानते हैं कि ल.स.प. के उपयोग द्वारा इसे आसानी से हल किया जा सकता है। सर्वप्रथम महावीराचार्य ने ल.स.प. का 'निरुद्ध' नाम देते हुए इसकी विधि बताई है। पर श्रीधराचार्य तथा आगे भास्कराचार्य ने भी इसका उपयोग नहीं किया। इसका उपयोग करने पर-

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12} = \frac{3+4+2+1}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

द्वितीय उदाहरण-

$\frac{5}{2}+\frac{11}{4}+\frac{6}{1} = \frac{20+22+48}{8} = \frac{90}{8} = \frac{45}{4}$ या ल.स.प के द्वारा $\frac{10+11+24}{4} = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}$

व्यवकलितसूत्रं परार्धम्

तुल्यच्छेदाद्यान्यराश्योरंशान्तरं कुर्यात्[१]।। १९।।

भिन्न राशियों को घटाने के लिये श्लोक का उत्तरार्ध-

---

१. तुल्यच्छेदायव्ययराश्यो....पाटी-गणित सूत्र 32 तथा तुल.ब्रा.स्फु.सि. 12.2 म.सि. 15.14, ग.ति.पृ. 18 सि.शे. 13.8, लीलावती भिन्नपरिकर्माष्टक श्लोक 4

सुक्षेमा अनुवाद-समान छेद या हर बनाकर उसके आय वाले अंश से दूसरे व्यय वाले अंश को घटाने पर भिन्न संख्याओं का व्यवकलन होता है। (यह 'पाटी गणित' में पाठान्तर की सहायता से अर्थ है।)

उदाहरणम्

अर्धत्र्यंशषडंशान् रूपात् संशोध्य कथय शेषम्।
रूपत्रयमर्धोनं द्वे त्र्यंशयुते च कथय पञ्चभ्यः।। ८।।

न्यासः $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{1}$ शेषं०। द्वितीयोदाहरणे न्यासः $\frac{2}{\frac{1}{2}}$ $\frac{2}{\frac{1}{3}}$ । 5 लब्धं शेषम्। $\frac{1}{6}$ इति भिन्न-व्यवकलितम्।

सुक्षेमा अनुवाद-$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ तथा $\frac{1}{6}$ के योग को रूप या 1 से घटाने पर क्या शेष बचेगा। 3 में से आधा कम तथा 2 तथा तीसरे अंश के योग को 5 से घटाने पर क्या बचेगा।

अनुशीलन– प्रथम उदाहरण–

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} = 0$

द्वितीय उदाहरण–

$2\frac{1}{2}+2\frac{1}{3} = \frac{5}{2}+\frac{7}{3} = \frac{29}{6}$, $\frac{5}{1} - \frac{29}{6} = \frac{30-29}{6} = \frac{1}{6}$

भिन्नप्रत्युत्पन्ने सूत्रम्

प्रत्युत्पन्नफलं स्यादंशवधे छेदघातसंभक्ते[१]।

सुक्षेमा अनुवाद-छेद या हर का आपस में गुणा करके गुणनफल से अंश के गुणनफल को विभाजित करने पर भिन्न का गुणन होता है।

उदाहरणम्

रूपत्रयमर्धफलं गुणितं, पादान्वितेन रूपेण।
अर्धं च पादगुणितं किं भवति धनं पृथक् कथय।। ९।।

न्यासः $\frac{3}{\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{\frac{1}{4}}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ लब्धं यथाक्रमम् $\frac{35}{8}$ $\frac{1}{8}$ इति भिन्नप्रत्युत्पन्नः।

---

१. तुल. ब्रा.स्फु.सि. 12.3 पाटी-गणित सू. 33, ग.सा.सं.3.2, म.सि. 15.15. ग.ति.पृ. 19, लीलावती भिन्नपरिकर्माष्टक श्लोक 4

सुक्षेमा अनुवाद-3 रूप के साथ आधा फल अर्थात् $3\frac{1}{2}$ को चतुर्थांश से युक्त 1 अर्थात् $1\frac{1}{4}$ के साथ गुणनफल क्या होगा तथा आधा या $\frac{1}{2}$ संख्या चौथाई या $\frac{1}{4}$ से गुणित होने पर क्या उत्तर होगा, यह अलग बताओ।

अनुशीलन- पूर्वोक्तानुसार संक्रिया करने पर-

$3\frac{1}{2}\times1\frac{1}{4} = \frac{7}{2}\times\frac{5}{4} = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

भिन्नभागहारे सूत्रम्

छेदांशविपर्यासे हरस्य विहिते विधिः पूर्वः[१]।। २०।।

सुक्षेमा अनुवाद-हर तथा अंश को विपर्यास क्रम से रखने पर अर्थात् हर को अंश तथा अंश को हर बनाकर रखने पर पूर्वोक्त गुणन की रीति से विधि करने पर भाग होता है।

उदाहरणम्

सार्धद्वयेन भक्ताः षट् पादयुतास्तथा त्रिभिः सार्धैः।
पादयुतरूपषष्टिः संभक्ता कथय भागाप्तम्।। १०।।

2 6 3 60 लब्धं यथाक्रमम् $\frac{50}{20}$ $\frac{482}{28}$ इति भिन्न-भागहारः

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

सुक्षेमा अनुवाद-चौथाई सहित 6 अर्थात् $6\frac{1}{4}$ को आधा सहित 2 या $2\frac{1}{2}$ से भाग दीजिये। साथ ही चौथाई सहित 60 या $60\frac{1}{4}$ को आधे सहित 3 या $3\frac{1}{2}$ से भाग कर भागफल बताइये।

यहाँ पूर्वोक्त विधि अनुसार-

$6\frac{1}{4} \div 2\frac{1}{2} = \frac{25}{4} \div \frac{5}{2} = \frac{25}{4}\times\frac{2}{5} = \frac{50}{20} = \frac{5}{2}$

$60\frac{1}{4} \div 3\frac{1}{2} = \frac{241}{4} \div \frac{7}{2} = \frac{241}{4}\times\frac{2}{7} = \frac{482}{28} = \frac{241}{14}$

भिन्नवर्गे सूत्रम्

अंशकृतौ भक्तायां छेदनवर्गेण भिन्नवर्गफलम्[२]।

सुक्षेमा अनुवाद-अंश की कृति या वर्ग अर्थात् उसी संख्या से गुणन तथा छेदन या हर का वर्ग करने पर भिन्न संख्याओं का वर्गफल प्राप्त होता है।

---

१. तुल. ब्रा.स्फु.सि. 12.4, पाटी-गणित सू. 33, ग.सा.सं. 3.8, म.सि. 15.15. ग.ति.पृ. 21 लीलावती भिन्नपरिकर्माष्टक श्लोक 5

२. ब्रा.स्फु.सि. 12.5, पाटी-गणित सू. 34, ग.सा.सं. 3.13, म.सि. 15.16 लीलावती भिन्नपरिकर्माष्टक श्लोक 5

उदाहरणम्

सार्धद्वयस्य वर्गं पादयुतानां च कथय पञ्चानाम्।
अर्धस्य त्र्यंशस्य च यदि वर्गविधिं विजानासि[१]।। ११।।

न्यासः 2 5 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ यथाक्रमं वर्गराशयः $\frac{25}{4}$ $\frac{441}{16}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{9}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

सुक्षेमा अनुवाद-2 सहित आधा या $2\frac{1}{2}$, चौथाई सहित 5 या $5\frac{1}{4}$, तथा आधा या $\frac{1}{2}$ तथा तिहाई या $\frac{1}{3}$ का वर्ग बताओ, यदि इसकी विधि जानते हो।

अनुशीलन-यहाँ पूर्वोक्तानुसार-

$2\frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{25}{4}$, $5\frac{1}{4} = \frac{21}{4} = \frac{441}{16}$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

भिन्नवर्गमूले सूत्रम्

अंशस्य वर्गमूले छेदनमूलोद्धृते मूलम्[२]।। २१।।

उदाहरणम्

प्राग्लब्धवर्णानां न्यासः $\frac{25}{4}$ $\frac{441}{16}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{19}$ लब्धानि मूलानि $\frac{5}{2}$ $\frac{21}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

सुक्षमा अनुवाद-अंश का वर्गमूल तथा इसी प्रकार छेद या हर का वर्गमूल करने पर भिन्न संख्याओं का वर्गमूल प्राप्त होता है।

यहाँ पूर्वोक्तानुसार-

$\frac{25}{4} = \frac{5}{2}$, $\frac{441}{16} = \frac{21}{4}$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$

घने करण-सूत्रम्

अंशस्य घनं विभजेच्छेदस्य घनेन घनफलं भवति[३]।

भिन्न संख्याओं का घन

सुक्षेमा अनुवाद-अंश का तथा छेद या हर का घन करने पर भिन्न संख्याओं का घनफल प्राप्त होता है।

---

१. पाटी-गणित उदा. 12

२. तुल. ब्रा.स्फु.सि. 12.5। पाटी-गणित सू. 34, ग.सा.सं. 3.13, म.सि. 15.16, ग.कौ.पृ. 23 लीलावती भिन्नपरिकर्माष्टक श्लोक 5

३. तुल. पाटी-गणित सू. 35, ग.सा.सं. 3.13, म.सि. 15.17, ग.कौ.पृ. 25

उदाहरणम्

सप्तानां सार्धानां पञ्चदशानां च पादयुक्तानाम्।
पादस्य त्र्यंशस्य च कथय घनं यदि विजानासि।। १२।।

न्यास: $\frac{15}{2}$ $\frac{61}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ लब्धा यथाक्रमं घना $\frac{3375}{8}$ $\frac{226981}{64}$ $\frac{1}{64}$ $\frac{1}{27}$

सुक्षेमा अनुवाद-आधा सहित 6 या $6\frac{1}{2}$, चौथाई से युक्त 15 या $15\frac{1}{4}$ तथा एक चौथाई या $\frac{1}{4}$, एक तिहाई $\frac{1}{3}$ का घन बताओ, यदि जानते हो।

यहाँ पूर्वोक्तानुसार-

$$7\frac{1}{2}=\frac{15}{2}=\frac{15\times15\times15}{2\times2\times2}=\frac{3375}{8},\ 15\frac{1}{4}=\frac{61}{4}=\frac{61\times61\times61}{4\times4\times4}=\frac{226981}{64}$$

$\frac{1}{4}=\frac{1}{64}, \frac{1}{3}=\frac{1}{27}$

घनमूले करण सूत्रम्

अंशघनमूलराशौ छेदनमूलोद्धृते मूलम्[१]**।**

उदाहरणम्

प्राग्लब्धघनानां न्यास: $\frac{3375}{8}$ $\frac{226981}{64}$ $\frac{1}{64}$ $\frac{1}{27}$

यथोक्तकरणेन लब्धानि घनमूलानि $\frac{15}{2}$ $\frac{61}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ इति घनमूलम्

भिन्न संख्याओं का घनमूल

सुक्षेमा अनुवाद-अंश की घनमूल राशि तथा छेदन या हर का घनमूल लेने पर भिन्न संख्याओं का घनमूल प्राप्त होता है।

यहाँ पूर्वोक्तानुसार-

$\frac{3375}{8}=\frac{15}{2}, \frac{226981}{64}=\frac{61}{4}, \frac{1}{64}=\frac{1}{4}, \frac{1}{27}=\frac{1}{3}$

कलासवर्णने सूत्रम्

छेदाभ्यामन्योन्यं हन्याच्छेदांशकौ समुच्छित्त्यै[२]**।**

भिन्न संख्याओं के योग आदि का सूत्र

सुक्षेमा अनुवाद-भिन्न संख्याओं के योग आदि के लिये हर संख्याओं का एक दूसरे से गुणा कर लेना चाहिये। ताकि हर से अंश तदनुरूप बन जावें।

---

१. तुल. पाटी-गणित सू. 35, ग.सा.सं. 3.13, म.सि. 15.17, ग.ति. पृ. 26, लीलावती भिन्नपरिकर्माष्टक श्लोक 5

२. अंशत: तुल. पाटी-गणित सू. 36, ब्रा.स्फु.सि. 12.2, म.सि. 15.13, ग.ति.पृ. 30, लीलावती

उदाहरणम्

द्व्यादिषडन्तैश्छेदैरेकैकेनांशकेन को राशिः।
त्र्यादिनवान्तैश्च हरैर्द्व्यादिभिरंशैः समायोगे[१]।। १३।।

न्यासः $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{8}{9}$ लब्धानि रूपाणि 7

भागाश्च $\frac{305}{2020}$ इति भागजातिः

सुक्षेमा अनुवाद-ऐसी भिन्न संख्याएँ जिनके हर क्रमशः 2 से लेकर 6 हैं तथा अंश सर्वत्र 1-1 हैं, इनका योग कौन राशि होगी। साथ ही 3 से लेकर 9 तक हर संख्याओं वाली तथा 2 से लेकर 8 तक क्रमशः अंश संख्याओं वाली भिन्न संख्याओं का योग क्या होगा।

यहाँ पूर्वोक्तानुसार–

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{360+240+180+144+120}{720}=\frac{1044}{720}\div 12=\frac{87}{60}$$

अथवा ल.स.प. लेकर $=\frac{30+20+15+12+10}{60}=\frac{87}{60}$

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+\frac{7}{8}+\frac{8}{9}=$$

$$\frac{120960+136080+145152+151200+155520+158760+161280}{181440}$$

$$\Rightarrow\frac{1028952}{181440}\frac{\div 72}{\div 72}=\frac{14291}{2520}$$

अथवा ल.स.प लेकर $=\frac{1680+1890+2016+2100+2160+2205+2240}{2520}=\frac{14291}{2520}$

दोनों भिन्न योगों का योग $=\frac{87}{60}+\frac{14291}{2520}=\frac{3654+14291}{2520}=\frac{17945}{2520}=7\frac{305}{2520}$

अथवा $7\ \frac{305}{2520}\ \frac{\div 5}{\div 5}=7\frac{61}{504}$

प्रभागजातौ सूत्रम्

छेदानामभ्यासः प्रभागजातौ भवेत् तथांशानाम्[२]।। २३।।

---

१. तुल. पाटी-गणित उदा. 14

२. तुल. ब्रा.स्फु.सि. 12.8। पाटी-गणित सू. 38। ग.सा.सं. 3.99। म.सि. 15.13, लीलावती

सुक्षेमा अनुवाद-प्रभागजाति में छेद या हर का तथा उसी प्रकार उसके अंशों का भी गुणन होता है।

उदाहरणम्

काकिण्यर्धं तस्मात् तृतीयभागस्ततश्च पञ्चांशः।
योगे कियद् धनं वद यदि गणितविधिं विजानासि।। १४।।

$\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\quad \frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\quad \frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{5}$ लब्धा वराटकाः 14

सुक्षेमा अनुवाद-एक काकिणी का आधा या $\frac{1}{2}$ उसका $\frac{1}{3}$ तथा उसका $\frac{1}{5}$ जोड़ने से कितना धन होता है, बताओ, यदि गणितविधि को जानते हो।

यहाँ विविध हिस्सों के हिस्से प्राप्त करने के लिये आपस में गुणन तथा उसके पश्चात् जोड़ होगा। अतः –

$(\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}\times+\frac{1}{3}) + (\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$ काकिणी

क्योंकि 20 वराटक की 1 काकिणी, अतः $20\times\frac{7}{10} = \frac{140}{10} = 14$ वराटक

अन्यदुदाहरणम्

सार्धद्वयस्य पादो रूपत्रितयस्य षोडशोंऽशश्च।
अष्टांशस्य दशांशत्रितयं योगे किमाचक्ष्व।। १५।।

न्यासः $\frac{5}{2}\ \frac{1}{4}\quad \frac{3}{1}\ \frac{1}{16}\quad \frac{1}{8}\ \frac{3}{10}$ लब्धं भागाः $\frac{68}{80}$ इति प्रभागजातिः।

सुक्षेमा अनुवाद-आधा सहित 2 अर्थात् $2\frac{1}{2}$ का एक चौथाई या $\frac{1}{4}$ तथा 3 का सोलहवाँ अंश या $\frac{1}{16}$ तथा $\frac{1}{8}$ का $\frac{3}{10}$ के साथ योग क्या होगा, बताओ।

यहाँ पूर्वोक्तानुसार–

$(\frac{5}{2}\times\frac{1}{4}) + (\frac{3}{1}\times\frac{1}{16}) + (\frac{1}{8}\times\frac{3}{10}) = \frac{68}{80} = \frac{17}{20}$

भागानुबन्धजातौ सूत्रम्

भागानुबन्धजातौ रूपगुणच्छेदसंगुणः सांशः।

अथवान्यत् सूत्रम्

अधरहरच्छेदवधोऽधोंशयुतहरघ्न ऊर्ध्वांशः[१]।। २४।।

सुक्षेमा अनुवाद-भागानुबन्ध जाति में रूप या पूर्ण संख्या (a) से गुणित हर (c) का अंश (b) के साथ जोड़ होता है।

१. अधरघ्नोर्ध्वहरेऽधोंशयुतहरघ्न आद्यंशः - पाटी-गणित सूत्र 39
तथा तुल. ब्रा.स्फु.सि. 12.9। ग.सा.सं. 3.113, म.सि. 15.11, लीलावती।

अधरस्थ हर संख्या (b) का दूसरे छेद या हर (d) के साथ गुणन के पश्चात् ऊर्ध्व या प्रथम अंश (a) का दूसरे छोटे अंश (c) तथा हर (d) के जोड़ के साथ गुणन करने से भी भागानुबन्ध जाति प्राप्त होती है।

अनुशीलन-यहाँ प्रथम सूत्र में पूर्ण संख्या का भिन्न संख्या के जोड़ की विधि बताई है। इसके अनुसार-

$$a+\frac{b}{c}=\frac{c\times a+b}{c}$$

इस प्रकार प्रत्येक को भिन्न संख्या का रूप देकर योग की पूर्वोक्त विधि से ऐसी सभी संख्याओं का योग हो सकता है।

द्वितीय सूत्र में किसी भिन्न संख्या में उसी भिन्न संख्या के किसी हिस्से के जोड़ की विधि बताई है। इसे भागानुबन्ध (fractional increase) का नाम दिया गया है। इसके अनुसार हम यह सूत्र प्राप्त करते हैं-

$$\frac{a}{b}\pm\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{a(d\pm c)}{bd}$$

इस सूत्र की उपपत्ति इस प्रकार है-

$$\frac{a}{b}\pm\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \left(\frac{a\times 1}{b}\right)\pm\left(\frac{a\times c}{b\,d}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}\left(1\pm\frac{c}{d}\right)$$ वितरण गुण के अनुसार

$$\Rightarrow \frac{a(d\pm c)}{bd}$$

पाटी-गणित श्लोक 40 में इसी रीति से भागापवाह (fractional decrease) की विधि बताई है। उसे सम्मिलित करने के लिये हमने प्रस्तुत सूत्र में व्यवकलन के चिह्न को भी अंकित किया है।

प्रथमसूत्रे उदाहरणम्

अर्धेन सहितमेकं पादेन युतानि पञ्च रूपाणि।
त्र्यंशसहितानि चाष्टौ समासतः किं धनं भवति[१]।। १६।।

---

१. तुल. पाटी-गणित उदा. 18

न्यासः 1 5 8

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ लब्धं यथाक्रमं धनं $\frac{3}{2}$ $\frac{21}{4}$ $\frac{25}{3}$ योगे कृते जातं $\frac{15}{\frac{1}{12}}$।।

सुक्षेमा अनुवाद-आधे से सहित 1 या $1\frac{1}{2}$, चौथाई सहित 5 या $5\frac{1}{4}$, तिहाई सहित 8 या $8\frac{1}{3}$ का योग कुल कितना धन होता है।

यहाँ सूत्रानुसार-

$1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}, 5\frac{1}{4} = \frac{21}{4}, 8\frac{1}{3} = \frac{25}{3}$

$\frac{3}{2} + \frac{21}{4} + \frac{25}{3} = \frac{36+126+200}{24} = \frac{362}{24} = 15\frac{1}{12}$

अथवा ल.स.प. लेने पर $\Rightarrow \frac{18+63+100}{12} = \frac{181}{12} = 15\frac{1}{12}$

द्वितीयसूत्रे उदाहरणम्

सार्धं रूपत्रितयस्य पादसहितं स्वषष्ठसंमिश्रम्।
अर्धं स्वत्र्यंशयुतं स्वपादयुक्तं च किं योगे।। १७।।

न्यासः 3

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

लब्धं रूपाणि 5 भागाश्च $\frac{15}{16}$ इति भागानुबन्ध जातिः।

सुक्षेमा अनुवाद-आधे के साथ 3 संख्या या $\frac{7}{2}$ तथा इसी संख्या से युक्त इसका $\frac{1}{4}$ तथा इस योगफल से प्राप्त संख्या का $\frac{1}{6}$ उस पूर्व संख्या से युक्त हैं। इस योगफल में आधा या $\frac{1}{2}$ उस आधे के तीसरे हिस्से या $\frac{1}{3}$ युक्त है तथा इस योगफल से प्राप्त संख्या का $\frac{1}{4}$ भी इसमें युक्त है। कुल योगफल क्या है।

अनुशीलन-यहाँ पहले प्रश्न के प्रथम अंश को उपपत्ति के साथ हल करते हैं-

$$\frac{7^a}{2_b} + \frac{7}{2} \times \frac{1^c}{4_d} = (\tfrac{7}{2}\times\tfrac{4}{4}) + (\tfrac{7}{2}\times\tfrac{1}{4}) \Rightarrow \tfrac{7}{2}\ (\tfrac{4}{4} + \tfrac{1}{4})$$

$$\Rightarrow \frac{7\ (4+1)}{2\times4} = \frac{7\times5}{8} = \frac{35}{8}$$

अथवा $\frac{7}{2}+\frac{7}{8} = \frac{28+7}{8} = \frac{35}{8}$

सम्पूर्ण प्रश्न के हल के लिये उसे अंकगणितीय भाषा में प्रस्तुत करते हैं–

$$\frac{7^a}{2_b}+\frac{7}{2}\times\frac{1^c}{4_d}+\left\{\frac{1^c}{6_d}\left(\frac{7}{2}+\frac{7}{2}\times\frac{1}{4}\right)\right\}+\frac{1^a}{2_b}+\frac{1}{2}\times\frac{1^c}{3_d}+\left\{\frac{1^c}{4_d}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)\right\}$$

पूर्वोक्त सूत्रानुसार–

$$\frac{7\,(4+1)\,(6+1)}{2\times4\times6}+\frac{(3+1)\,(4+1)}{2\times3\times4}$$

$=\frac{245}{48}+\frac{5}{6}=\frac{245+40}{48}=\frac{285}{48}=\frac{95}{16}=5\frac{15}{16}$

अथवा

$\frac{7}{2}+\frac{7}{8}+\{\frac{1}{6}\;(\frac{7}{2}+\frac{7}{8})\}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\{\frac{1}{4}\;(\frac{1}{2}+\frac{1}{6})\}$

$\Rightarrow \frac{35}{8}+(\frac{1}{6}\times\frac{35}{8})+\frac{2}{3}+(\frac{1}{4}\times\frac{2}{3})$

$=\frac{35}{8}+\frac{35}{48}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$

$=\frac{285}{48}=\frac{95}{16}=5\frac{15}{16}$

प्रभागजातौ सूत्रम्

रूपे छेदेन हृते छेदगमो भवति भागभागविधिः[१]।

सुक्षेमा अनुवाद–रूप या पूर्ण राशि का किसी भिन्न संख्या से भाग करने के लिये रूप का छेद या हरके साथ गुणन करने पर उसका छेदगम अर्थात् उसके छेद का विनाश हो जाता है तथा अंश छेद बन जाता है[२]। यह भागभाग विधि होती है।

अनुशीलन–यहाँ भिन्न संख्याओं के भाग का प्रकार बताया है। इसके लिये भिन्न संख्या के हर को रूप या पूर्ण राशि से गुणन करना चाहिये तथा अंश को हर बना लेना चाहिये। इस प्रकार यह परिणाम प्राप्त होता है–

$$a\div\frac{b}{c}=\frac{ac}{b}$$

उदाहरणम्

षड्भागभागो दशभागभागस्त्रिभागभागश्च नवांशभागः।
जानासि चेद् ब्रूहि सखे विचिन्त्य द्विभागभागश्च धनं किमैक्यम्।। १८।।

१. तुल. ब्रा.स्फु.सि 12.9. पाटी–गणित सू. 38, ग.सा.सं. 3.99, म.सि. 15.19

२. यस्य भागेन भागस्तस्मिन् रूपे भागसम्बन्धिना छेदेन हते तस्य छेदस्य गमो विनाशः। अंश इदानीं छेदो जातः, रूपराशिश्चांशः – पाटी–गणित सूत्र 38 पर व्याख्या

$\frac{1}{\frac{1}{6}}$ $\frac{1}{\frac{1}{10}}$ $\frac{1}{\frac{1}{3}}$ $\frac{1}{\frac{1}{9}}$ $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ लब्धं रूपाणि 30

सुक्षेमा अनुवाद-1 का उसी 1 के छठे भाग अर्थात् $\frac{1}{6}$ से भाग, इसी प्रकार 1 का $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{2}$ से भाग करके प्राप्त संख्या का योग सोच कर बताओ, यदि गणित विधि जानते हो।

अनुशीलन-यहाँ पूर्वोक्तानुसार-

$1 \div \frac{1}{6} = 1 \times 6 = 6$ इसी प्रकार अगली संख्याएँ प्राप्त है।

अतः $6 + 10 + 3 + 9 + 2 = 30$

अन्यदुदाहरणम्

त्र्यादिषडन्तैश्छेदैद्व्याद्यंशकभागराशिसम्भक्तम्।
रूपं पृथक् कियत् स्यात् संयोगे वित्तमाचक्ष्व।। १९।।

न्यासः $\frac{1}{\frac{2}{3}}$ $\frac{1}{\frac{3}{4}}$ $\frac{1}{\frac{4}{5}}$ $\frac{1}{\frac{5}{6}}$ लब्धं रूपाणि 5, भागाश्च $\frac{17}{60}$

सुक्षेमा अनुवाद-ऐसी भिन्न संख्याएँ जिनके हर क्रमशः 3 से 6 तक हैं तथा उन्हीं के अंश क्रमशः 2 से 5 तक हैं। इनका 1 से भाग करने पर भाग तथा उनके भागफल का योग करने पर कितना कुल धन होगा, बताओ।

अनुशीलन-यहाँ पूर्वोक्तानुसार-

$1 \div \frac{2}{3} = {}^{1} \times \frac{3}{2}$, इसी प्रकार अन्य संख्याओं के भाग से प्राप्त संख्याओं का योग $\rightarrow$ $\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} = \frac{317}{60} = 5\frac{17}{60}$

भागमातृजातौ करणसूत्रम्

भागादीनां यस्यां सम्भूतिर्भवति भागमाता सा।
तस्यां यथोक्तकरणैः पृथक्-पृथक् फलविनिष्पत्तिः[१]।। २५।।

सुक्षेमा अनुवाद-जिस संख्या में भाग आदि अनेक संक्रियाएँ की जाती हैं, वह भागमाता कही जाती है। उसमें पूर्वोक्त अनुसार अलग-अलग संक्रियाओं के प्रयोग से परिणाम प्राप्त होते हैं।

अर्ध पादात् पादस्त्रिभागभागोऽर्धमर्धसंयुक्तम्।
त्र्यंशोऽर्धेन विहीनः समासतः किं फलं भवति।। २०।।

---

१. तुल. पाटी-गणित सू. 42, ग.सा.सं. 3.138

न्यासः $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{\frac{1}{3}}$ $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$ $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}$ लब्धं रूपाणि 4, भागाश्च $\frac{23}{48}$

सुक्षेमा अनुवाद-आधा का आधा या $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, चौथाई का चौथाई या $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}= \frac{1}{16}$, 1 से एक तिहाई इस भिन्न संख्या का भाग या $1\div\frac{1}{3} = 1\times3 = 3$ तथा, आधा से युक्त आधा या $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}=1$ तथा आधे से एक तिहाई कम या $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ इनका योग करने पर क्या फल होगा।

अनुशीलन-इस उदाहरण में $\frac{1}{2}$ के साथ अनेक संक्रियाएँ की गई हैं। अत: यही भागमाता है। उपरिलिखित का जोड़ निम्नानुसार-

4 पूर्ण तथा $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{6} = \frac{12+3+8}{48} = \frac{23}{48}$

अन्यदुदाहरणम्।

पादत्र्यंशस्य दलं द्विभागभागोऽर्धसंयुतान्यष्टौ।
योगे कियद्धनं वद यदि गणितविधिं विजानासि।। २१।।

न्यासः $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ $\frac{8}{\frac{1}{2}}$ लब्धम् $10\frac{11}{12}$ इति भागमातृजातति:

इति षट्प्रकारकलासवर्णनम्।

सुक्षेमा अनुवाद-तीसरा हिस्सा या $\frac{1}{3}$ तथा उसका पाद या एक चौथाई भाग या $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, 1 का द्विभाग इस भिन्न संख्या का भाग अर्थात् $1\div\frac{1}{2} = {}^{1}\times\frac{2}{1} = 2$ तथा आधे से युक्त 8 अर्थात् $8\frac{1}{2} = \frac{17}{2}$ इनके जोड़ने पर बताओ कुल कितना धन होता है, यदि गणित विधि को जानते हो।

अनुशीलन-यहाँ भी $\frac{1}{2}$ भागमाता है। प्रश्नानुसार 2 पूर्ण तथा $\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{17}{2}$ $= \frac{4+1+102}{12} = \frac{107}{12} = 8\frac{11}{12} + 2 = 10\frac{11}{12}$

अथ वल्लीसवर्णने करणसूत्रम्

प्राक् छेदांशौ गुणयेच्छेदेनाधःस्थितेन पूर्वांशे।
धनमृणमधःस्थितांशं कुर्वीत सवर्णने वल्ल्या[१]।। २६।।

सुक्षेमा अनुवाद-वल्ली के सवर्णन या एकरूप बनाने के लिये पहले कहे गए छेद या हर तथा अंश को उससे नीचे स्थित हर के साथ गुणित करें। पुनः

१. तुल. पाटी-गणित सू. 41, म.सि. 15.18, ग.ति.पृ. 39

पहले अंश में अधः स्थित या नीचे वाले अंश को यथावसर जोड़ने या घटाने पर वल्ली-सवर्णन होता है।

पञ्च पुराणास्त्रिपणाः काकिण्येका वराटकेनोना।
तत्पञ्चमभागोना समासतः किं फलं भवति।। २२।।

$\frac{5}{1}$

$\frac{3}{16}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{20}$

$\frac{1}{5}$ न्यासः। सवर्णिते जातं $\frac{16647}{3200}$, लब्धं पुराणाः 5, पणाः 3, काकिणी 0। वराटकाः 18। वराटकभागाश्च $\frac{4}{5}$। इति वल्ली-सवर्णनम्।

सुक्षेमा अनुवाद-5 पुराण, 3 पण तथा 1 काकिणी में 1 वराटक कम तथा उसी काकिणी में से वराटक का $\frac{1}{5}$ कम होने की स्थिति में सबका जोड़ क्या होगा।

अनुशीलन-इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिये वल्ली या सारिणी बनाई जाती है। पश्चात् उपरिलिखित विधि से अलग-२ परिमाण के सिक्कों का 'सवर्णन' या एकरूप बनाया जाता है। इस प्रकार बनाकर जोड़ने या घटाने से अभीष्ट परिणाम प्राप्त होता है।

प्रस्तुत उदाहरण की संस्कृत व्याख्या में इस प्रकार की वल्ली बनाई गई है। इसमें क्रमशः उपरिलिखित विधि अन्वित करते हैं-

83
16
1
4
1-
20
1-
5

संक्रिया का निरूपण- 5 पुराण तथा $\frac{3}{16}$ पुराण को जोड़ने पर $5+\frac{3}{16}=\frac{83}{16}$

पुनः श्लोक का अनुगमन करते हुए अगली सारणी-

333
64

1- संक्रिया का निरूपण → $\frac{83}{16}$ पुराण के अंश और हर को
20 काकिणी का रूप देने के लिये दोनों का 4 से गुणन। साथ ही
1- अंश में 1 काकिणी का सम्मिलन→
5 $\frac{83}{16} \times \frac{4}{4} + \frac{1}{} = \frac{333}{64}$

पुनः उसी प्रकार सवर्णन करने पर–

6659 संक्रिया का निरूपण– $\frac{333}{64}$ पुराण के अंश और हर को
1280 वराटक में बदलने के लिये दोनों का 20 से गुणन।
1- प्रश्नानुसार अंश से 1 वराटक कम करने पर–
5 $\frac{333}{64} \times \frac{20}{20} {}^{-1} = \frac{6659}{1280}$

पुनः अन्तिम का सवर्णन करने पर–

33294 = 16647 अंश और हर को 5 से गुणित करके प्रश्नानुसार
6400 = 3200 अंश से 1 कम करने पर- $\frac{6659}{1280} \times \frac{5}{5} {}^{-1} = \frac{33294}{7400}$

इस प्रकार सवर्णित होने पर $\frac{16647}{3200}$ पुराण = 5 $\frac{647}{3200}$ पुराण

इसकी उपपत्ति के लिये अन्य प्रकार से प्रश्न को हल करते हैं–

श्लोक के अनुसार प्रश्न का आकार

$\frac{5}{1}$ पुराण + $\frac{3}{1}$ पण + {$\frac{1}{1}$ − $\frac{1}{20}$ − ($\frac{1}{20}\times\frac{1}{5}$) काकिणी}

नोट– 20 वराटक की 1 काकिणी

⇒ $\frac{5}{1}$ पुराण + $\frac{3}{1}$ पण + {$\frac{1}{1}$ − $\frac{1}{20}$ − $\frac{1}{100}$ काकिणी

⇒ $\frac{5}{1}$ पुराण + ($\frac{3}{1}$ पण × $\frac{1}{16}$) + ($\frac{47}{50}$ काकिणी × $\frac{1}{64}$)

नोट– 16 पण का 1 पुराण, 4 काकिणी का 1 पण

अर्थात् 64 काकिणी का 1 पुराण। अतः–

⇒ $\frac{5}{1}$ पुराण + $\frac{3}{16}$ पुराण + $\frac{47}{3200}$ पुराण = $\frac{16647}{3200}$ पुराण

श्लोक की व्याख्या के अनुसार प्रश्न का आकार

$\frac{5}{1}$ पुराण + $\frac{3}{16}$ पुराण +{$\frac{1}{4}$ − ($\frac{1}{4}\times\frac{1}{20}$) − ($\frac{1}{4}\times\frac{1}{20}\times\frac{1}{5}$) पण}

नोट–20 वराटक की 1 काकिणी

4 काकिणी का 1 पण अतः 80 वराटक का 1 पण

⇒ $\frac{5}{1}$ पुराण + $\frac{3}{16}$ पुराण + ($\frac{1}{4}$ − $\frac{1}{80}$ − $\frac{1}{100}$ पण)

⇒ $\frac{5}{1}$ पुराण + $\frac{3}{16}$ पुराण + ($\frac{94}{400}$ पण × $\frac{1}{16}$)

नोट- 16 पण का 1 पुराण

$\Rightarrow \frac{5}{1}$ पुराण + $\frac{3}{16}$ पुराण + $\frac{47}{3200}$ पुराण $= \frac{16647}{3200}$ पुराण ($\Rightarrow \times 1\frac{1}{2}$) –

$\frac{16647}{3200}$ पुराण = 5 पुराण + $\frac{647}{3200}$, $\frac{647}{3200} \times 16 = \frac{10352}{3200}$ = 3 पण + $\frac{752}{3200}$, $\frac{752}{3200} \times 4 = \frac{3008}{3200}$ स्पष्टत: पूर्णांक में काकिणी 0 है। अत: $\frac{3008}{3200} \times 20 = \frac{60160}{3200} = 18$ वराटक+ $\frac{2560}{3200} \div \frac{640}{640} = \frac{4}{5}$ अत: वराटक भाग $\frac{4}{5}$

वास्तव में त्रिशतिकाकार द्वारा इस प्रश्न को इतने लम्बे उपाय से हल करने की आवश्यकता नहीं। प्रश्न में स्वयं कहा है कि 5 पुराण तथा 3 पण हैं। अत: इनके साथ अन्य संख्याओं को जोड़कर पुन: अन्त में इसी संख्या को प्राप्त करने की आवश्यकता नहीं। काकिणी में से भी कुछ वराटक कम किये गए हैं। अत: स्पष्ट ही पूर्णांक में काकिणी 0 ही होगी।

काकिणी में से 1 वराटक तथा उसका पाँचवाँ भाग अर्थात् $1+\frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ वराटक कम करना है। अत: 1 काकिणी को 20 वराटकों में बदलकर उक्त संख्या घटाने से यह प्रश्न आसानी से समाहित है–

$20 - \frac{6}{5} = \frac{94}{5} = 18$ वराटक + $\frac{4}{5}$ वराटक भाग

स्पष्टत: यह पूर्वोक्त हल के अनुरूप है।

अत: यहाँ त्रिशतिकाकार की विधि द्वारा केवल यह प्रदर्शित करना है कि किसी सिक्के में से किसी अन्य मान वाले सिक्के को घटाने से पहले दोनों सिक्कों के मान को समान बना लेना चाहिये। इस प्रक्रिया में यदि किसी हिस्से को घटाना है तो उसे भिन्न का रूप देकर पहले हिस्सा प्राप्त कर लेना चाहिये।

ऊपर वाले प्रश्न में 1 काकिणी को वराटक में बदल दिया गया है। यह भी हो सकता है घटाए जाने वाले वराटक को काकिणी का आकार देकर प्रश्न को इस रूप में प्रस्तुत करें–

$1 - \frac{1}{20} - (\frac{1}{20} \times \frac{1}{5}) \Rightarrow 1 - \frac{1}{20} - \frac{1}{100} = \frac{47}{50}$ काकिणी

इसे वराटक में बदलने पर $\Rightarrow \frac{47}{50} \times 20 = 18\frac{4}{5}$

स्पष्टत: दोनों ही प्रकार से एक ही उत्तर प्राप्त करते हैं।

स्तम्भोद्देशे करण-सूत्रम्

स्तम्भांशैक्यं त्यक्त्वा रूपाच्छेषेण सम्भजेद् दृश्यम्[१]।

१. तुल. स्तम्भे शेषे च भजेत् दृश्यं रूपेण भागहीनेन। - पाटीगणित सूत्र 74
तथा तुल. ग.सा.सं. 4.4 में शेषजाति के अन्तर्गत सूत्र तथा अनेक उदाहरण म.सि. 15.20, ग.ति.पृ. 44

सुक्षेमा अनुवाद-रूप या पूर्ण 1 राशि में से स्तम्भ के अनेक अंशों के योग को घटा कर शेष से दृश्य को भाग देने पर फल प्राप्त होता है।

अनुशीलन-यहाँ किसी अज्ञात राशि की कुछ भिन्न राशियाँ तथा एक पूर्ण ज्ञात राशि का प्रयोग होने पर अज्ञात राशि को प्राप्त करने का नियम बताया गया है। यह सर्वथा अंकगणित विधि है।

उदाहरणम्

अर्धषडंशद्वादशभागा जलपंकबालुकान्तःस्थाः।
दृश्यं हस्तद्वितयं कथय सखे स्तम्भपरिमाणम्[१]।। २३।।

सुक्षेमा अनुवाद-किसी खम्भे की कुल लम्बाई का $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ तथा $\frac{1}{12}$ भाग क्रमशः जल, कीचड़ तथा बालू में हैं। साथ ही 2 हाथ ऊपर दिखाई पड़ रहा है। खम्भे की कुल लम्बाई बताओ।

अनुशीलन-यहाँ पूर्वोक्त विधि अनुसार-

भिन्न संख्याओं का योग $\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

1से योग को घटाना $\Rightarrow 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

शेष से दृश्य का भाग $\Rightarrow 2 \div \frac{1}{4}\ 2\times4 = 8$

इस प्रकार के प्रश्न बीजगणितीय समीकरण से भी भली प्रकार हल हो सकते हैं। जैसे प्रस्तुत प्रश्न-

$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}x + 2 = x$$
$$\Rightarrow 3x + 8 = 4x$$
$$\Rightarrow 4x - 3x = 8$$
$$\Rightarrow x = 8$$

अन्यदुदाहरणम्

स्तम्भस्य भागार्धनवाष्टषट्काः केदारपंकोदरशैवलेषु।
हस्तद्वयं दृश्यमथांगुलं च स्तम्भप्रमाणं वद शीघ्रमेतत्।। २४।।

न्यासः $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{6}$ दृश्यमंगुलात्मकम् 49, लब्धं स्तम्भ-प्रमाणं हस्ताः २१।

---

१. तुल. त्र्यंशषडंशा नद्याः जलपंकबालुकान्तःस्था।
स्तम्भस्य करत्रितयं दृश्यं तन्मानमाचक्ष्व।। - पाटीगणित उदा. 96

सुक्षेमा अनुवाद-किसी खम्भे की कुल लम्बाई का $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}$ क्रमशः खेत, कीचड़, धरती के अन्दर तथा सेवार घास में छुपा हुआ है। केवल 2 हाथ तथा एक अंगुल दिखाई पड़ रहा है। खम्भे की कुल लम्बाई जल्दी बताओ।

अनुशीलन-यहाँ भी पूर्वोक्तानुसार-

सभी हिस्सों का जोड़ $\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{65}{72}$

1 से कुल योग को घटाना $\Rightarrow$ $1 - \frac{65}{72} = \frac{7}{72}$

शेष से दृश्य का भाग $\Rightarrow 49 \div \frac{7}{72} = \frac{49 \times 72}{7} = \frac{3528}{7} = 504$ अंगुल

$504 \div 24 = 21$ हस्त

24 अंगुल का 1 हस्त होता है। अतः 2 हस्त 1 अंगुल = 49 अंगुल बनाकर प्रश्न हल किया गया है।

इसे बीजगणितीय समीकरण से इस प्रकार हल करेंगे-

$\frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{65}{72}$

$$\Rightarrow \frac{65}{72}x + 49 = x$$
$$\Rightarrow 65x + 3528 = 72x$$
$$\Rightarrow 72x - 65x = 3528$$
$$\Rightarrow 7x = 3528$$
$$x = \frac{3528}{7} = 504$$ अंगुल या 21 हस्त

अन्यदुदाहरणम्

अर्धं तोये कर्दमे द्वादशांशः षष्ठो भागो बालुकायां निमग्नः।
सार्धो हस्तो दृश्यते यस्य तस्य स्तम्भस्याशु ब्रूहि मानं विचिन्त्य।। २५।।

न्यासः $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{6}$ दृश्यम् $\frac{3}{2}$ लब्धं हस्ताः 6

सुक्षेमा अनुवाद-किसी खम्भे की कुल लम्बाई का आधा या $\frac{1}{2}$ पानी में, बारहवाँ हिस्सा या $\frac{1}{12}$ कीचड़ में तथा छठा हिस्सा या $\frac{1}{6}$ बालू में धँसा हुआ है। साथ ही उसका सार्ध या $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ हाथ ऊपर दिखाई पड़ रहा है। ऐसी खम्भे की कुल लम्बाई जल्दी सोचकर बताओ।

अनुशीलन-यहाँ भी पूर्वोक्तानुसार-

खम्भे के सभी अंशों का योग $\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

1 से कुल योग का व्यवकलन $\Rightarrow 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

शेष से दृश्य का भाग $\frac{3}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{12}{2} = 6$

बीजगणितीय समीकरण के अनुसार–

$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \tfrac{3}{4}x + \tfrac{3}{2} = x$$

$$\Rightarrow \frac{3x+6}{4} = x$$

$$\Rightarrow 3x+6 = 4x$$

$$\Rightarrow 4x - 3x = 6$$

$$= x = 6$$

इस प्रकार के समीकरणों से सभी संक्रियाओं का कारण भी सर्वथा स्पष्ट हो जाता है।

कामिन्या हारवत्याः सुरतकलहतो मौक्तिकानां त्रुटित्वा।
भूमौ यातस्त्रिभागः शयनतलगतः पञ्चमांशश्च दृष्टः।।
आत्तः षष्ठः सुकेश्या गणक दशमकः संगृहीतः प्रियेण।
दृष्टं षट्कं च सूत्रे कथय कतिपयैर्मौक्तिकेरेष हारः।। २६।।

सुक्षेमा अनुवाद–सुरत कलह के समय मोती के हार वाली किसी कामिनी का हार टूट कर गिर पड़ा। उस हार के $\frac{1}{3}$ मोती धरती पर, $\frac{1}{5}$ बिस्तर पर देखे गए। उसके $\frac{1}{6}$ मोती सुन्दर केशों वाली को प्राप्त हो गए तथा $\frac{1}{10}$ उसके प्रिय ने चुन लिये। अब केवल शेष 6 मोती धागे में लगे हुए पाए गए। हे गणक! बताओ, वह हार कुल कितने मोतियों का था।

अनुशीलन–परवर्ती गणित शास्त्र में इस प्रकार के श्लोक बहुत प्रसिद्ध हुए। भास्कराचार्य ने 'इष्ट कर्म' के अन्तर्गत 'त्रिशतिका' का नाम लेकर इस प्रकार के प्रश्न उद्धृत किये हैं। इन्हें 'इष्ट कर्म' नाम देने का कारण यह है कि इन प्रश्नों के हल के लिये पहले किसी कल्पित इष्ट संख्या को स्वीकार करना पड़ता है। श्रीधराचार्य ने श्लोक 27 में ऐसी इष्ट संख्या 1 को माना है।

इस प्रकार प्रस्तुत प्रश्न का हल–

मोती के सभी अंशों का योग $\Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{24}{30}$

कल्पित इष्ट संख्या 1 से व्यवकलन $\Rightarrow 1 - \frac{24}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

शेष से दृश्य का भाग $\Rightarrow 6 \div \frac{1}{5} = 6 \times 5 = 30$

बीजगणितीय समीकरण के अनुसार–

$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \frac{4}{5}x + 6 = x$

$\Rightarrow 4x + 30 = 5x$

$\Rightarrow 5x - 4x = 30$

$x = 30$

जाँचें

$30 \times \frac{1}{3}$ = 10 धरती पर गिरे

$30 \times \frac{1}{5}$ = 6 बिस्तर पर गिरे

$30 \times \frac{1}{6}$ = 5 कामिनी को प्राप्त हुए

$30 \times \frac{1}{10}$ = 3 प्रिय ने उठाए

शेष = 6

= 30 कुल मोती

अन्यदुदाहरणम्

यूथार्ध सत्रिभागं गिरिशिखरगतं कुञ्जराणां च दृष्टं।
षट् भागश्चैव नद्यां पिबति च सलिलं सप्तभागेन युक्तः।।
पद्मिन्यामष्टभागः स्वनवकसहितः क्रीडते जातरागो।
नागेन्द्रो हस्तिनीभिस्तिसृभिरनुगतः का भवेद्यूथसंख्या[१]।। २७।।

न्यासः $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{8}$ दृश्यम् 4, लब्धं यूथसंख्या 1008
$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{9}$

सुक्षेमा अनुवाद–किसी जंगल में हाथियों का बहुत बड़ा झुण्ड देखा गया। उस झुण्ड का $\frac{1}{2}$ अपने $\frac{1}{3}$ से युक्त होकर अर्थात् $\frac{1}{2}$ का तृतीयांश उसी $\frac{1}{2}$ से जुड़कर जंगल की खोह में चला गया। झुण्ड का $\frac{1}{6}$ अपने $\frac{1}{7}$ से युक्त होकर नदी में पानी पीने चला गया। उसी झुण्ड का $\frac{1}{8}$ अपने $\frac{1}{9}$ से युक्त होकर कमलिनीवन में चला गया। शेष 3 हथिनियों के बीच 1 गजेन्द्र प्रेमक्रीडा करता हुआ देखा गया। हाथियों की कुल संख्या बताओ।

---

१. तुल. ग.ति.पृ. 42

अनुशीलन-इस प्रश्न में प्रत्येक भिन्न संख्याओं के साथ उसी संख्या का कोई अंश भी सम्मिलित हैं। अतः यहाँ श्लोक 24 में कही गई भागानुबन्ध विधि के पश्चात् पूर्वोक्त संक्रिया की जावेगी।

इस प्रकार भागानुबन्ध विधि से जोड़

$$\frac{1\,(3+1)}{2\times3}+\frac{1\,(7+1)}{6\times7}+\frac{1\,(9+1)}{8\times9}=\frac{251}{252}$$

अथवा

$\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3})+\frac{1}{6}+(\frac{1}{6}\times\frac{1}{7})+\frac{1}{8}+(\frac{1}{8}\times\frac{1}{9})$

$\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{42}+\frac{1}{8}+\frac{1}{72}=\frac{502}{504}=\frac{251}{252}$

कल्पित राशि 1 से घटाएँ $\Rightarrow 1-\frac{251}{252}=\frac{1}{252}$

शेष से दृश्य का भाग $\Rightarrow 4\div\frac{1}{252}=4\times252=1008$ अभिमत राशि

बीजगणितीय समीकरण के अनुसार–

$\{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{3})+\frac{1}{6}(1+\frac{1}{7})+\frac{1}{8}(1+\frac{1}{9})\}\,x+4=x$

$\Rightarrow \{\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{8}{7}+\frac{1}{8}\times\frac{10}{9}\}\,x+4=x$

$\Rightarrow \frac{251}{252}\,x+4=x,$

$\Rightarrow 251\,x+1008=252x$

$\Rightarrow 252\,x-251\,x=1008$

$\Rightarrow \quad x \quad =1008$

जाँचें–

$1008\times\frac{2}{3}$	$=672$	जंगल की खोह में चले गए
$1008\times\frac{4}{21}$	$=192$	नदी में पानी पीने गए
$1008\times\frac{5}{36}$	$=140$	कमलिनीवन में चले गए
शेष	$=4$	
	1008	कुल हाथियों की संख्या

अन्यदुदाहरणम्

षड्भागः पाटलासु भ्रमति गणयुतः स्वत्रिभागः कदम्बे।
पादश्चूतद्रुमे च प्रदलितकुसुमे चम्पके पञ्चमांशः।

प्रोत्फुल्लाम्भोजखण्डे रविकरदलिते त्रिंशदंशोऽभिरेमे।
तत्रैको मत्तभृंगो भ्रमति नभसि चेत् का भवेद् भृंगसंख्या[१]।। २८।।

न्यासः $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{30}$ दृश्यम् 1 लब्धं भृंगाः 60

सुक्षेमा अनुवाद-भ्रमरसमूह का $\frac{1}{6}$ भाग पाटल पर, $\frac{1}{3}$ भाग कदम्ब पर, $\frac{1}{4}$ भाग आम के वृक्ष पर, $\frac{1}{5}$ भाग चम्पा पुष्पों पर, तथा $\frac{1}{30}$ भाग सूर्य की किरणों से खिले हुए कमल-पुष्पों पर रमण करने लगा। उनमें से केवल 1 मतवाला भौंरा आकाश में उड़ रहा था। कुल भौंरों की संख्या बताओ।

अनुशीलन-यहाँ पूर्वोक्त विधि के अनुसार-

भौंरों के सभी उपविभागों का योग⇒

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{30} = \frac{10+20+15+12+2}{60} = \frac{59}{60}$$

कल्पित राशि 1 से घटाएँ $\Rightarrow 1 - \frac{59}{60} = \frac{1}{60}$

शेष से दृश्य का भाग $1 \div \frac{1}{60} = 1 \times 60 = 60$ कुल भौंरे

बीजगणितीय समीकरण के अनुसार-

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{30} = \frac{59}{60}$$

$$\Rightarrow \frac{59}{60}x + 1 = x$$

$$\Rightarrow 59x + 60 = 60x$$

$$\Rightarrow 60x - 59x = 60$$

$$x = 60$$

जाँचें-

$60 \times \frac{1}{6}$ = 10 पाटल पर

$60 \times \frac{1}{3}$ = 20 कदम्ब पर

$60 \times \frac{1}{4}$ = 15 आम के वृक्ष पर

$60 \times \frac{1}{5}$ = 12 चम्पा पुष्प पर

$60 \times \frac{1}{30}$ = 2 कमल पुष्पों पर

शेष = 1 आकाश पर

60 कुल भौंरे

---

१. तुल. ग.सा.सं. 4.6

पादः पादेन संयुक्तस्त्र्यंशस्त्र्यंशेन संयुतः।
पञ्चांशः पञ्चमांशेन दृष्टश्चैकादशः पृथक्।। २९।।

न्यासः $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ दृश्यम् 11, लब्धं हस्ताः 3600
$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$

इति स्तम्भोद्देशकाः।

सुक्षेमा अनुवाद-किसी विशाल पहाड़ का पाद या एक चौथाई अपने चौथाई के चौथाई से युक्त, इसी प्रकार एक तिहाई अपने तिहाई के एक तिहाई से तथा $\frac{1}{5}$ अंश अपने $\frac{1}{5}$ के पाँचवें अंश से युक्त होने पर 11 हाथ अलग से दिखता है, उसकी कुल कितनी लम्बाई है।

अनुशीलन-यहाँ प्रश्नानुसार-

$$\frac{1}{4} + (\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}) + \frac{1}{3} + (\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}) + \frac{1}{5} + (\frac{1}{5} \times \frac{1}{5})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{900+225+1200+400+720+144}{3600}$$

$$= \frac{3589}{3600}$$

कल्पित 1 राशि से घटाएँ $\Rightarrow 1 - \frac{3589}{3600} = \frac{11}{3600}$

शेष से दृश्य का भाग $\frac{3600 \times 11}{11} = 3600$ हाथ

बीजगणितीय समीकरण के अनुसार-

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{3589}{3600}$$

$$\Rightarrow \frac{3589}{3600} x + 11 = x$$

$$\Rightarrow 3589 x + 39600 = 3600x$$

$$\Rightarrow 3600 x - 3589 x = 39600$$

$$\Rightarrow 11 x = 39600$$

$$\Rightarrow x = \frac{39600}{11}$$

= 3600 हाथ

त्रैराशिके सूत्रम्

आद्यन्तयोस्त्रिराशावभिन्नजाती प्रमाणमिच्छा च।
फलमन्यजाति मध्ये तदन्त्यगुणमादिमेन भजेत्[१]।। २९।।

सुक्षेमा अनुवाद-त्रैराशिक में प्रमाण तथा इच्छा समान जाति वाले होते हैं। इन्हें क्रमशः आदि तथा अन्त में रखना चाहिये। फल या प्रमाण-फल अन्य जाति वाला है, इसे मध्य में रखें। इस प्रमाण-फल को अन्त्य या इच्छा से गुणित करके आदिम अर्थात् प्रमाण से भाग देना चाहिये।

अनुशीलन-प्रस्तुत श्लोक में अनुपात तथा समानुपात के नियमों को समझाया गया है। अनुपात में दो राशियों की आपस में तुलना की जाती है। प्रस्तुत नियम में विभाजन द्वारा इन्हें तुलनीय बनाया गया है। अर्थात् किसी राशि का अन्य राशि के साथ दूरी या सह सम्बन्ध को, वह कितनी बार अन्य राशि से विभजनीय है, इस रूप में प्रकट किया गया है।

इस उपाय से किन्हीं दो राशियों का जो अनुपात है, ठीक वही दूरी या अनुपात अन्य दो राशियों का भी हो तो प्रथम दो राशियों के सापेक्ष अन्य दो राशियाँ समानुपात में कही जावेंगी।

यदि प्रथम दो राशियों का अनुपात बता दिया गया हो तो अन्य दो राशियों में से केवल एक राशि का परिज्ञान होने पर शेष चौथी समानुपातिक राशि गणितीय विधि से जानी जा सकती है। प्रस्तुत श्लोक में यही विधि बताई गई है। इसमें केवल 3 ही ज्ञात राशियाँ होती हैं। अतः इसे त्रैराशिक नाम दिया गया है।

यहाँ प्रथम राशि को प्रमाण (scale) या पैमाना कहा गया है। क्योंकि इससे ही अन्य राशि नापी जाती है। इसे प्रश्न हल करने में सबसे पहले रखने का निर्देश दिया गया है। इस राशिद्विक में दूसरी राशि को प्रमाणफल (result) कहा है। इसे प्रमाण के बाद रखा गया है। समान जाति वाली या संगत पद वाली राशि को 'इच्छा' कहा गया है। क्योंकि इसकी ही समानुपातिक राशि ज्ञात करनी है।

यहाँ हम प्रमाण को a प्रमाणफल को b तथा इच्छा को c से प्रकट करेंगे। श्लोक के नियम में कहा गया है कि इस चतुर्थ समानुातिक राशि या इच्छा फल (d) को ज्ञात करने के लिये प्रमाणफल (b) को इच्छा (c) से गुणित करके प्रमाण (a) से भाग देना चाहिये। इस प्रकार हमें (d) के लिये यह सूत्र प्राप्त होता है-

$$\text{इच्छा फल } (d) = \frac{\text{प्रमाणफल } (b) \times \text{इच्छा } (c)}{\text{प्रमाण } (a)}$$

१. तुल. आर्यभटीय 2.26, ब्रा.स्फु.सि. 12.10, पाटी-गणित सू. 43, ग.सा.सं. 5.2, ग.ति.पृ. 68, सि.शे. 13.14, लीलावती त्रैराशिक श्लोक 7

तीन राशियों से सम्बन्धित होने के कारण इस नियम को त्रैराशिक नाम दिया गया है। आर्यभट ने स्पष्ट रूप से इसका उल्लेख किया है। गणितशास्त्र में शताब्दियों तक इस नियम का बहुत सम्मान किया गया है। भास्कराचार्य की यह उक्ति प्रसिद्ध है कि–

त्रैराशिकेनैव यदेतदुक्तं व्याप्तं स्वभेदैर्हरिणेव विश्वम्।

–लीलावती, छाया व्यवहार श्लोक ४

अर्थात् जिस प्रकार विष्णु अनेक भेदों से सम्पूर्ण विश्व में व्याप्त है, उसी प्रकार सम्पूर्ण गणित त्रैराशिक के भेदों से परिपूर्ण है।

इस नियम को प्रस्तुत उदाहरण द्वारा आसानी से समझा जा सकता है–

चन्दनपलं सकर्षं सार्धैयदि लभ्यते पणैर्दशभिः।
तत् कियता लभ्यन्ते पलानि नव कर्ष युक्तानि[१]।। ३०।।

न्यासः 1 10 09

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ लब्धं पुराणाः 4, पणाः 13

काकिण्यौ 2 । वराटकाः 16

सुक्षेमा अनुवाद–1 कर्ष या $\frac{1}{4}$ पल सहित 1 पल अर्थात् $\frac{5}{4}$ पल चन्दन $\frac{1}{2}$ सहित 10 पण में अर्थात् $\frac{21}{2}$ पण में प्राप्त होता है। तो 1 कर्ष या $\frac{1}{4}$ पल सहित 9 पल अर्थात् $\frac{37}{4}$ पल चन्दन कितने मूल्य में प्राप्त होगा।

अनुशीलन–यहाँ सुविधा के लिये पहले भिन्न संख्याओं को पूर्णांक में बदल लेते हैं–

पूर्वोक्त विवरण के अनुसार 4 कर्ष का 1 पल तथा 4 काकिणी का 1 पण। अतः–

$\frac{5}{4} \times 4$ = 5 कर्ष,

$\frac{21}{2} \times 4$ = 42 काकिणी

$\frac{37}{4} \times 4$ = 37 कर्ष

अब सूत्र के निर्देश के अनुसार प्रमाण (a) 5 कर्ष को पहले तथा प्रमाणफल (b) 42 काकिणी को बाद में रखते हुए प्रश्न का यह आकार बनाते हैं–

5 कर्ष चन्दन (a) का मूल्य 42 काकिणी (b) है

37 कर्ष चन्दन (c) का मूल्य कितना (d) होगा।

---

१. तुल. पाटी–गणित उदा. 45

सूत्र के अनुसार इस प्रश्न का हल–

$\frac{42 \times 37}{5} = \frac{1554}{5}$ अथवा 310 $\frac{4}{5}$ काकिणी

$\frac{310}{4}$ पण + $\frac{4}{5}$ काकिणी =77 पण + 2 $\frac{4}{5}$ काकिणी

$\Rightarrow$ $\frac{77}{16}$ पुराण + 2$\frac{4}{5}$ काकिणी=4 पुराण+ 13 पण+2$\frac{4}{5}$ काकिणी

$\Rightarrow$ 4 पुराण+13 पण+2 काकिणी+ $\frac{4 \times 20}{5}$वराटक

= 4 पुराण+13 पण+2 काकिणी+16 वराटक

इस कुल मूल्य से 37 कर्ष चन्दन प्राप्त होगा।

प्रस्तुत उदाहरण में प्रथम राशिद्वय प्रमाण तथा प्रमाणफल क्रमशः 5 कर्ष तथा 42 में अनुपात स्थापित किया गया है। इन संख्याओं की विभाजन विधि से तुलना के द्वारा कहा जा सकता है कि 1 कर्ष की तुलना में काकिणी $\frac{42}{5}$ गुना अधिक है। अतः अनुपात–

$$1:\frac{42}{5}$$

इस समानुपात को दोनों ओर एक ही प्रकार की संख्याओं से गुणित करके अन्य अनेक समानुपात प्राप्त किये जा सकते हैं। जैसे–

$$1:\frac{42}{5} :: 2:\frac{84}{5} :: 3:\frac{126}{5} :: 4:\frac{168}{5} :: 5:\frac{210}{5} = 5:42$$

यहाँ सभी संगत मानों में 1:$\frac{42}{5}$ का अनुपात बदलता नहीं है। अतः ये सभी समानुपाती मान हैं। दोनों ओर एक ही प्रकार की संख्या से गुणित करके अनन्त ऐसे मान प्राप्त किये जा सकते हैं।

प्रस्तुत प्रश्न तथा इसकी विधि में 1: $\frac{42}{5}$ का 37 के साथ संगत समानुपात खोजा गया है। ऐकिक नियम में भी ठीक यही संक्रिया की जाती है। अतः वहाँ भी इसी अनुपात को जानने का प्रयास किया गया है।

इस विवरण से समानुपात का यह रूप प्राप्त होता है–

$$\frac{\text{प्रमाण (a)}}{\text{प्रमाणफल (b)}} = \frac{\text{इच्छा (c)}}{\text{इच्छाफल (d)}}$$

इससे स्वभावतः यह समीकरण विकसित होता है–

प्रमाण (a) × इच्छाफल (d) = प्रमाणफल (b) × इच्छा (c)

इस समीकरण से समानुपात के लिये यह नियम स्थिर होता है कि

समानुपात में संगत पदों का वज्रगुणन फल या व्युत्क्रम गुणनफल बराबर होता है।

इस समीकरण से पुन: वही सूत्र प्राप्त करने में सक्षम हो जाते हैं, जिसका उल्लेख त्रिशतिकाकार ने किया है–

$$\text{इच्छाफल (d)} = \frac{\text{प्रमाणफल (b)} \times \text{इच्छा (c)}}{\text{प्रमाण (a)}}$$

उपरिलिखित विवेचना का निष्कर्ष यह है कि–

I. त्रैराशिक नियम के सभी प्रश्न संगत समानुपात के प्रश्न हैं। इसमें संगत समानुपात की एक अज्ञात राशि का पता लगाया जाता है।

II. इसमें दो राशियों को विभाजन की विधि से या 1 के सापेक्ष तुलना द्वारा अनुपात स्थापित किया जाता है।

III. पुन: संगत समानुपात की एक राशि के ज्ञान होने पर दूसरी अज्ञात समानुपातिक राशि को पहचाना जाता है।

IV. इसके लिये सीधे उपरिलिखित अंकगणितीय सूत्र का या ऐकिक नियम का या बीजगणितीय समीकरण का उपयोग किया जाता है। प्रत्येक विधि से वही सूत्र तथा ठीक वही परिणाम प्राप्त होता है।

अन्यदुदाहरणम्

मरिचपलं सत्र्यंशं पणेन यदि लभ्यते सपादेन।
तत् त्र्यंशोनैर्दशभि: पणै: कियत् कथ्यतामाशु।। ३१।।

न्यास: 1 1 10

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ लब्धं पलानि 10। कर्षम् 1

माषा 3। गुञ्जा: 4। भागाश्च $\frac{5}{9}$

सुक्षेमा अनुवाद-यदि 1 $\frac{1}{4}$ या $\frac{5}{4}$ पण से 1 $\frac{1}{3}$ = $\frac{4}{3}$ पल मरिच मिलती है तो 10 − $\frac{1}{3}$ = $\frac{29}{3}$ पण में कितनी प्राप्त होगी।

यहाँ $\frac{5}{4}$ प्रमाण (a), $\frac{4}{3}$ प्रमाणफल (b) तथा $\frac{29}{3}$ इच्छा (c) है। अत: पूर्वोक्त सूत्रानुसार–

$$\text{इच्छा-फल (d)} = \frac{\frac{4}{3} \times \frac{29}{3}}{\frac{5}{4}} = \frac{116}{9} \times \frac{4}{5} = \frac{464}{45} \text{ पल मरिच}$$

$\frac{464}{45} = 10\ \frac{14}{45}$ पल, $\frac{14}{45} \times 4 = \frac{56}{45} = 1\ \frac{11}{45}$ कर्ष

$\frac{11}{45} \times 16 = \frac{176}{45} = 3\ \frac{41}{45}$ माष, $\frac{41}{45} \times 5 = \frac{205}{45} = 4\ \frac{25}{45}$ गुंजा

$\frac{25}{45} = \frac{5}{9}$ गुंजा के भाग।

ऐकिक नियम द्वारा प्रश्न का हल–

$\frac{5}{4}$ पण में $\frac{4}{3}$ पल

$\therefore$ 1 पण में $\frac{4}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$ पल

$\therefore$ $\frac{29}{3}$ पण में $\frac{29}{3} \times \frac{16}{15} = \frac{464}{45}$ पल

बीजगणितीय समीकरण द्वारा प्रश्न का हल–

$$\quad a \quad b \quad c \quad d$$

हम देखते हैं कि– $\frac{5}{4} : \frac{4}{3} :: \frac{29}{3} : x$

अतः–

$a \times d = b \times c$ के अनुसार–

$\frac{5}{4}\ x = \frac{4}{3} \times \frac{29}{3}$

$\Rightarrow x = \frac{4}{3} \times \frac{29}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{464}{45}$

यह पूर्वोक्त सूत्र के सर्वथा समकक्ष है।

खारीषष्टिः सार्धा रूपशतेन त्रिभागयुक्तेन।
यदि कथय ततो धान्यं रूपस्यैकस्य किं भवति[१]।। ३२।।

न्यासः 60 100 1

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ 1 लब्धं खारी 0। द्रोणाः 9

आढकौ 2। प्रस्थौ 2। कुडवः 1। कुडवभागाश्च $\frac{139}{301}$

सुक्षेमा अनुवाद-$100\frac{1}{3}$ या $\frac{301}{3}$ रूप से $60\frac{1}{2}$ या $\frac{121}{2}$ खारी धान्य प्राप्त होता है, तो 1 रूप से कितना धान्य प्राप्त होगा।

अनुशीलन-सूत्रानुसार–

$\frac{121}{2} \times \frac{3}{301} = \frac{363}{602}$ खारी धान्य। पूर्णांक खारी

$\frac{363}{602} \times 16 = \frac{2904}{301} = 9\ \frac{195}{301}$ द्रोण, $\frac{195}{301} \times 4 = \frac{780}{301} = 2\ \frac{178}{301}$ आढक

$\frac{178}{301} \times 4 = \frac{712}{301} = 2\ \frac{110}{301}$ प्रस्थ, $\frac{110}{301} \times 4 = \frac{440}{301} = 1\ \frac{139}{301}$ कुडव

१. तुल. पाटी-गणित उदा. 28

धान्यद्रोणः सार्धः कुडवत्रितयं च लभ्यतेऽष्टाभिः।
तद् द्रोणयुक्तखार्या किं मूल्यं कथ्यतामाशु[१]।। ३३।।

आद्यन्तयोः कुडवैर्न्यासः $\frac{99}{1}$ $\frac{8}{1}$ $\frac{1088}{1}$

लब्धानि रूपाणि 87 भागाश्च $\frac{91}{99}$

सुक्षेमा अनुवाद–$\frac{3}{2}$ द्रोण तथा 3 कुडव अर्थात् 99 कुडव धान्य का मूल्य 8 रूप है तो 1 द्रोण से युक्त 1 खारी अर्थात् 1088 कुडव धान्य का मूल्य क्या होगा।

अनुशीलन–यहाँ सूत्रानुसार–

$8 \times \frac{1088}{99} = \frac{8704}{99} = 87\ \frac{91}{99}$ रूप मूल्य

अन्यदुदाहरणम्

यत्र सुवर्णो लभते रूपाणां सप्ततिं त्रिभागयुताम्।
तत्रैको माषः किं दशभागोनः सखे कथय।। ३४।।

न्यासः $\frac{16}{1}$ 70 1

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{10}$ लब्धानि रूपाणि 3, भागाश्च $\frac{153}{160}$

सुक्षेमा अनुवाद–1 सुवर्ण या 16 माष से $70\frac{1}{3}$ या $\frac{211}{3}$ रूप प्राप्त होते हैं। तो 1– $\frac{1}{10}$ अर्थात् $\frac{9}{10}$ माष से कितने रूप प्राप्त होंगे।

अनुशीलन–यहाँ सूत्रानुसार–

$\frac{\frac{211}{3} \times \frac{9}{10}}{16} = \frac{633}{10} \times \frac{1}{16} = \frac{633}{160} = 3\frac{153}{160}$ रूप

अन्यदुदाहरणम्

पंगुः प्रयाति कश्चिद् दिवसत्रितयेन योजनाष्टांशम्।
योजनशतं स यास्यति निगद्यतां केन कालेन[२]।। ३५।।

न्यासः $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{1}$ $\frac{100}{1}$ लब्धं वर्षाणि 6 मास 8

सुक्षेमा अनुवाद–कोई लंगड़ा $\frac{1}{8}$ योजन 3 दिन में पार करता है तो वह 100 योजन कितने दिन में पहुँचेगा।

---

१. तुल. पाटी–गणित उदा. 27-28, ग.सा.सं. 5.2, म.सि. 15.24-25, ग.ति.पृ. 68, लीलावती त्रैराशिक उदा. 3

२. उदा. 30, ग.सा.सं. 5.3.4, ग.ति.पृ. 72

अनुशीलन-सूत्रानुसार –

$\frac{3\times100}{\frac{1}{8}} = 300\times8 = 2400$ दिन या 6 वर्ष 8 मास

अन्यदुदाहरणम्

कीटोऽङ्गुल-षड्भागः गच्छत्यह्नश्चतुर्थभागेन।
दशयोजनानि यास्यति स केन कालेन सार्धानि।। ३६।।

योजनैरंगुलीकृतैर्न्यासः।। $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{8064000}{1}$

लब्धानि वर्षाणि 33600

सुक्षेमा अनुवाद-कोई कीड़ा $\frac{1}{6}$ अंगुल $\frac{1}{4}$ दिन में चल पाता है तो 10 योजन[१] अर्थात् 8064000 अंगुल कितने दिन में चल पावेगा।

अनुशीलन-सूत्रानुसार–

$\frac{\frac{1}{4}\times 8064000}{\frac{1}{6}} = 2016000\times6 = 12096000$

$= 12096000 \div 360 = 33600$ वर्ष

शतस्य भाव्यके यत्र षड् भवन्ति पृथक् सखे।
तत्र रूपसहस्रस्य मध्यतः किं भवेद् धनम्।। ३७।।

अत्र शते षट् प्रक्षिप्य आद्यन्तयोर्मिश्रधनेन न्यासः। 106। 6। 1000। लब्धं रूपाणि भाव्यके 56। रूपभागाश्च $\frac{32}{53}$

सुक्षेमा अनुवाद-यदि 100 में 6 मिलाने पर अर्थात् 106 मूल्य से 6 वस्तुएँ प्राप्त होती हैं तो 1000 मूल्य से कितनी प्राप्त होंगी।

अनुशीलन-सूत्रानुसार –

$\frac{6\times1000}{106} = \frac{6000}{106} = 56 + \frac{64}{106}$ या $\frac{32}{55}$ भाग

अन्यदुदाहरणम्

अष्टसेतिकहारेण मापिता हारविंशतिः।
सा षट् सेतिकहारेण का संख्या भवितोच्यताम्।। ३८।।

---

१. त्रिशतिका श्लोक 7 के अनुसार 2000 दण्ड का एक कोस, 4 हस्त का 1 दण्ड, 24 अंगुल का 1 हस्त सिद्ध होता है।

अत्र त्रैराशिकद्वयम्

यद्येकस्मिन् हारे अष्टौ सेतिका: स्यु ततो हारविंशत्या कति सेतिका: स्युरिति। न्यास:।। 1। 8। 20।। लब्धं सेतिका: 160

पुनस्त्रैराशिकम्

यदि सेतिकाषट्केनैको हारस्तत् सेतिकाशतेन षष्ट्यधिकेन कति हारा: स्युरिति न्यास:।। 6। 1। 160। लब्धं हारा: 26 हारभागाश्च $\frac{2}{3}$

सुक्षेमा अनुवाद-यदि एक हार में 8 सेतिका या गुरिया हों तो 20 हार में कितनी गुरियाँ मापी जावेंगी।

श्लेष से अन्य प्रश्न– यदि 6 गुरिया से 1 हार बनता है तो $20 \times 8 = 160$ गुरिया से कितने हार बनेंगे।

अनुशीलन-सूत्रानुसार–

प्रथम प्रश्न–

$8 \times 20 =$ 160 गुरियाँ

द्वितीय प्रश्न–$\frac{160}{6} = 26 + \frac{4}{6}$ अर्थात् 26 पूर्ण हार, $\frac{2}{3}$ भाग

अन्यदुदाहरणम्

षोडशवर्णककाञ्चनसुवर्णशतमष्टषष्टि-संयुक्तम्।
परिवर्त्य लभ्यते कियदेकादशवर्णकं कनकम्[१]।। ३९।।

अत्रापि त्रैराशिकद्वयम्

यद्येकस्मिन् सुवर्णे षोडशवर्णका: कल्याणसुवर्णस्य षोडशमाषका इत्यर्थ:। तत्सुवर्णशतेऽष्टषष्ट्यधिके कति वर्णका: स्युरिति। न्यास:।। 1। 16। 168। लब्धं वर्णका: 2688

पुनस्त्रैराशिकम्

यद्येकादशभिर्वर्णकैरेक: सुवर्णस्तत: षड्विंशत्याष्टाशीत्यधिकया कियन्त: सुवर्णा: स्युरिति न्यास: 11। 1। 2688। लब्धं सुवर्णा: 244। माषा: 5। गुञ्जा: 4। गुञ्जाभागाश्च $\frac{1}{11}$।।

---

१. तुल. पाटी–गणित उदा. 36, ग.सा.सं. 5.18, ग.ति.पृ. 74

सुक्षेमा अनुवाद-यदि 1 'सुवर्ण' नामक सिक्के में 16 वर्णक या माषक होते हैं। तो 68 सहित 100 अर्थात् 168 'सुवर्ण' सिक्के में कितने माषक होंगे।

श्लेष से अन्य प्रश्न– यदि 11 वर्णक वाले सोने का मूल्य एक 'सुवर्ण' सिक्का है तो $168 \times 16 = 2688$ वर्णकों का मूल्य कितने सुवर्ण होगा।

त्रिशतिका सूत्र 5 पृ. 3 से प्रकट है कि 'कल्याणसुवर्ण' नामक सिक्का 16 माष का होता है। यह 16 वर्ण अर्थात् 24 कैरेट का सबसे विशुद्ध सोना माना जाता है।

अनुशीलन-सूत्रानुसार–

प्रथम प्रश्न- $168 \times 16 = 2688$ माषक व्यस्तत्रैराशिके सूत्रम्

द्वितीय प्रश्न $\frac{2688}{11} = 244 + \frac{4}{11}$ सुवर्ण

$\frac{4}{11} \times 16 = \frac{64}{11} = 5 + \frac{9}{11}$ माष

$\frac{9}{11} \times 5 = \frac{45}{11} = 4 + \frac{1}{11}$ गुंजा, $\frac{1}{11}$ गुंजा भाग

आदिगुणितेऽन्त्यभक्ते मध्ये मानान्तरे भवति गणितम्[१]।

सुक्षेमा अनुवाद-मध्य या प्रमाण फल (b) को आदि प्रमाण (a) से गुणित करके अन्त्य या इच्छा (c) से भाग करने पर विपरीत मान या व्युत्क्रम अनुपात वाला गणित सिद्ध होता है।

अनुशीलन-प्रस्तुत श्लोक में विपरीत अनुपात या व्युत्क्रमानुपात के नियम बताए गए हैं। किन्हीं दो पदों का जो अनुपात है, यदि उनके संगत पदों का ठीक उनसे विपरीत अनुपात हो तो वे व्युत्क्रमानुपाती पद कहे जावेंगे।

यदि दो पद तथा उनके संगत पदों में से एक की व्युत्क्रमानुपाती राशि बता दी गई हो तो दूसरी व्युत्क्रमानुपाती राशि प्रस्तुत नियम के द्वारा खोजी जा सकती है। इसके प्रकार के प्रश्नों में 3 राशियाँ ज्ञात होती है। साथ ही तीसरी संगत राशि अन्य के सापेक्ष व्युत्क्रम होने से इसे व्यस्तत्रैराशिक नाम दिया गया है।

यहाँ भी प्रमाण को a प्रमाणफल को b तथा इच्छा को c से प्रकट कर सकते हैं। श्लोक के अनुसार ऐसे प्रश्नों के हल के लिये प्रमाण (a) प्रमाणफल (b) से

---

१. तुल. ब्रा.स्फु.सि. 12.11 ग.सि. 15.25, लीलावती

गुणा करके इच्छा (c) से भाग देकर अज्ञात राशि (d) का प्राप्त कर सकते हैं। इस नियम के अनुसार हम यह सूत्र प्राप्त करते हैं–

$$\text{इच्छाफल } (d) = \frac{\text{प्रमाण } (a) \times \text{प्रमाणफल } (b)}{\text{इच्छा } (c)}$$

इस नियम को प्रस्तुत उदाहरण में समन्वित करते हैं–

अष्टसेतिकहारेण मापिता हारविंशतिः।
सा षट् सेतिकहारेण का संख्या भवितोच्यताम्[१]।। ४०।।

न्यासः $\frac{8}{1}$ $\frac{20}{1}$ $\frac{6}{1}$ लब्धं हाराः $26\frac{2}{3}$

सुक्षेमा अनुवाद-कुछ सेतिका या मोतियों में से 8-8 मोतियों वाले 20 हार बनते हैं, तो उतने ही मोतियों में से 6-6 मोतियों वाले कितने हार बनेंगे।

अनुशीलन-यहाँ पूवोक्त श्लोक का अर्थ परिवर्तित करके व्युत्क्रमानुपात के रूप में प्रस्तुत किया गया है।

यहाँ 8 सेतिका वाला हार प्रमाण (a) है। 20 हार प्रमाणफल (b) तथा 6 सेतिका वाला हार इच्छा है। अतः अज्ञात राशि (d) के लिये सूत्रानुसार–

$$\frac{8\times20}{6} = \frac{160}{6} = 26\tfrac{2}{3} \text{ हार}$$

यहाँ प्रस्तुत प्रश्नों में 8 तथा 20 इस मान का व्युत्क्रमानुपाती संगत मान प्राप्त किया गया है। यहाँ तुलना के लिये इन मानों के व्युत्क्रमानुपाती तथा समानुपाती संगत मान इस तालिका में प्रस्तुत करते हैं–

व्युत्क्रमानुपाती				अनुक्रमानुपाती		
मोती	x	8^a	6^c	x	8	6
हार	y	20^b	$26\frac{2}{3}^d$	y	$26\frac{2}{3}$	20

तालिका से स्पष्ट है कि अनुक्रमानुपाती में x के पदों का जो अनुपात है ठीक वही अनुपात इसके संगत y पदों का भी है। क्योंकि–

$8\times\frac{3}{4} = 6$ तथा $\frac{80}{3}\times\frac{3}{4} = 20$

---

१. मुक्ताफलानामष्टभिरष्टभिः सेतिकैरेकैको हारः कृतः, विंशतिश्च हारा जाताः। त एव मुक्ताहारा मुक्तावलीकृताः षट्सेतिकहारकल्पनया कियन्तो भवन्ति।। - पाटी-गणित उदा. 34 पर व्याख्या

पर व्युत्क्रमानुपाती तालिका में x के पदों के अनुपात के ठीक विपरीत y के संगत पदों का है। यह तालिका से स्पष्ट है तथा इस प्रकार भी–

$8\times\frac{3}{4} = 6$ तथा $20\times\frac{4}{3} = \frac{80}{3}$

इससे स्पष्ट है कि व्युत्क्रमानुपात में x में प्रथम पद के सापेक्ष दूसरे पद का अनुपात जितना घटता (या बढ़ता) है, उसके संगत y के प्रथम पद के सापेक्ष दूसरे पद का अनुपात ठीक उतना ही बढ़ता (या घटता) है। इस स्थिति में व्युत्क्रमानुपात का विवरण इस प्रकार प्राप्त होता है–

$$\frac{\text{प्रमाण (a)}}{\text{इच्छाफल (d)}} = \frac{\text{इच्छा (c)}}{\text{प्रमाणफल (b)}}$$

अतः स्वभावतः समीकरण यह प्राप्त होता है–

$$a \times b = c \times d$$

इससे यह समीकरण प्राप्त होता है–

$$\text{इच्छाफल (d)} = \frac{\text{प्रमाण (a)} \times \text{प्रमाणफल (b)}}{\text{इच्छा (c)}}$$

इस प्रकार हमने बीजगणितीय समीकरण की विधि से उक्त सूत्र पुनः प्राप्त कर लिया है। इससे यह भी सिद्ध है कि त्रिशतिका का यह सूत्र वास्तव में व्युत्क्रमानुपात के एक अज्ञात पद को खोजने का उपाय है।

अन्यदुदाहरणम्

पञ्चरक्तिकमाषेण सुवर्णानां शतत्रयम्।
षष्टिरक्तिकमाषेण[१] का संख्या भवितोच्यताम्।।

5। 300। 60। लब्धं 25।।

सुक्षेमा अनुवाद-यदि 5 रक्तिक (रत्ती) वाले 'माष' वाले तोल से 300 सुवर्ण तोले जाते हैं, तो 60 रत्ती वाले माष वाले तोल से कितने सुवर्ण तुलेंगे।

अनुशीलन-सूत्रानुसार–

$$\frac{5 \times 300}{60} = \frac{1500}{60} = 25 \text{ सुवर्ण}$$

---

१. तत् षड्रक्तिक माषेण...पाटी-गणित श्लोक 35
स्पष्टतः 6 रत्ती वाले तोल से 250 सुवर्ण प्राप्त होंगे।

समीकरण विधि के अनुसार–

$a \times b = \quad c \times d$ अत: $60x \quad = 5 \times 300$

$$x = \frac{5 \times 300}{60} = 25$$

स्पष्टत: समीकरण तथा सूत्र सर्वथा समान हैं।

अन्यदुदाहरणम्

सार्धद्वादशवर्णं सुवर्णशतमर्धकोपेतम्।
दत्वाऽऽप्यते कियत् तत् सचरणदशवार्णिकं कनकम्[१]।। ४२।।

न्यास: 12 100 10

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ लब्धं सुवर्णा: 122

पणा: 8। रक्तिका: 4। रक्तिकाभागाश्च $\frac{36}{41}$।।

सुक्षेमा अनुवाद-एक निश्चित मूल्य देकर $12\frac{1}{2}$ या $\frac{25}{2}$ वर्ण (carat) वाले आधे सहित 100 अर्थात् $\frac{201}{2}$ 'सुवर्ण' प्राप्त होते हैं तो उतना ही मूल्य देकर $10\frac{1}{4}$ वाले कितने 'सुवर्ण' खरीदे जा सकेंगे।

अनुशीलन-स्पष्टत: सोना जितना हीन गुण वाला होगा, उतना ही अधिक मिलेगा। अत: व्युत्क्रमानुपात के उपरिलिखित सूत्र के अनुसार–

$$\frac{\frac{25}{2} \times \frac{201}{2}}{\frac{41}{4}} = \frac{5025}{4} \times \frac{4}{41} = \frac{5025}{41} = 122\frac{23}{41}$$ सुवर्ण

$\frac{23}{41} \times 16 = \frac{368}{41} = 8\ \frac{40}{41}$ पण, $\frac{40}{41} \times 5 = \frac{200}{41} = 4\ \frac{36}{41}$ रक्तिका

अन्यदुदाहरणम्

त्रिकनवककम्बलानां विष्कम्भायामत: शतद्वितयम्।
विद्वन् द्विषट्फलानां जायन्ते कति च कथ्यतामाशु[२]।। ४३।।

न्यास: 3 9 200 2 6 कम्बलानां विष्कम्भायामौ

1

क्षेत्रफले विनीयात्। लब्धं कम्बला। 450।। इति व्यस्तत्रैराशिकम्।

---

१. तुल. पाटी-गणित उदा. 38, ग.सा.सं. 5.18

२. तुल. पाटी-गणित उदा. 37 ग.सा.सं. 5.19

सुक्षेमा अनुवाद-विद्वन्! यदि सूत्र के एक निश्चित परिमाण से क्रमशः 3 तथा 9 चौड़ाई तथा लम्बाई वाले 200 कम्बल निर्मित होते हैं। तो उतने ही परिमाण से 2 तथा 6 चौड़ाई, लम्बाई वाले कितने कम्बल निर्मित होंगे।

अनुशीलन-स्पष्टतः जितने छोटे कम्बल होंगे उतने ही अधिक संख्या में कम्बल बनेंगे। यहाँ $3 \times 9 = 27$ वर्गहस्त तथा $2 \times 6 = 12$ वर्गहस्त क्षेत्रफल मानने पर–

$$\frac{27 \times 200}{12} = \frac{5400}{12} = 450$$ कम्बल प्राप्त होंगे।

अथ पञ्चसप्तनवराशिकेषु करणसूत्रमार्या

नीतफले ऽन्यं पक्षं विभजेद् बहुराशिपक्षमितरेण।
छेदानां व्यत्यासं कृत्वाभ्यासं च राशीनाम्[१]।। ३१।।

प्रमाण फल (R) का व्यत्यास या स्थान-परिवर्तन करके उन राशियों का अभ्यास या गुणित करके बहुराशि पक्ष या अधिक राशि के गुणनफल को इतर या अल्पराशि पक्ष अर्थात् अल्प राशि के गुणनफल से भाग देने पर पञ्चराशिक की अज्ञात राशि प्राप्त होती है।

उदाहरणम्

मासेन पञ्चकशते षष्टेर्वर्षेण किं फलं भवति।
फलतश्च कथय कालं ताभ्यामज्ञातमूलं च[२]।। ४४।।

न्यासः 1 12
100 60 लब्धं फलम् 36।
5

कालज्ञानार्थं न्यासः 1 0
100 60 लब्धं कालो मासाः 12
5 36

---

१. तुल. ब्रा.स्फु.सि. 12.11, पाटी-गणित सू. 45, ग.सा.सं. 5.32, म.सि. 15.26-27, ग.ति.पृ. 74, सि.शे. 13.15, लीलावती पाञ्चराश्यादिकम् श्लोक 9

२. पाटी-गणित उदा. 39, ग.सा.सं. 5.33, ग.ति.पृ. 75 लीलावती

मूलज्ञानार्थ न्यासः 1 12
100 0 लब्धं मूलं 60।
5 36

शतफलेऽज्ञाते न्यासः 1 12
100 60 लब्धं शतफलम् 5
0 36

प्रमाणकालेऽज्ञाते न्यासः 0 12
100 60 लब्धं प्रमाणकालः 1
5 36

सुक्षेमा अनुवाद-100/= रु. का 1 महीने का ब्याज 5/= रु. हो तो 60/= रु. का 1 वर्ष या 12 महीने का ब्याज फल कितना होगा। इस फल के आधार पर काल तथा इन दोनों के आधार पर मूलधन को ज्ञात करो। (इनके आधार पर शतफल तथा प्रमाण भी ज्ञात करो।)

अनुशीलन-इस प्रकार के प्रश्नों में 5 राशियाँ प्रस्तुत की जाती हैं। इनके द्वारा एक अन्य छठी राशि को ज्ञात करना होता है। अत: इन्हें पञ्चराशिक नाम दिया गया है। इन प्रश्नों में दो-दो राशियाँ आपस में गुणित होकर अन्य से संगत मान बनाती हैं। इस दशा में समानुपाती प्रश्न होता है। अथवा एक-एक राशि अन्य से समानुपात तथा दूसरी एक-एक राशि अन्य से व्युत्क्रमानुपात बनाती हैं। इस दशा में समानुपात के सूत्र से प्रथम राशि समूह की चतुर्थ राशि ज्ञात करने के पश्चात् व्युत्क्रमानुपात के सूत्र से द्वितीय राशि समूह की अज्ञात राशि का पता लगाया जाता है। इस दशा में समानुपात तथा व्युत्क्रमानुपात के पूर्वोक्त सूत्र तथा समीकरण के पूर्वोक्त नियम ही मूलत: क्रियाशील होते हैं।

इस प्रकार के प्रश्न मुख्यत: ब्याज के प्रश्नों से सम्बन्धित हैं। त्रिशतिकाकार ने ऐसे प्रश्नों को आसान रीति से सिद्ध करने का प्रयास किया है। इनके अनुसार इन नामों वाली संख्याओं को क्रम से रख लेते हैं-

प्रमाण राशि पक्ष	इच्छा राशि पक्ष
1 प्रमाण काल	12 इच्छा काल (T)
100 प्रमाण धन	60 इच्छा धन (P)
5 प्रमाण फल (R)	x अज्ञात फल (ब्याज)

अब निम्न सूत्र के अनुसार इनका स्थान परिवर्तन करते हुए प्रमाण-फल (R) को भाज्य बनाते हुए इस प्रकार लिखते हैं–

$$\text{ब्याज} = \frac{\text{प्रमाणफल} \times \text{इच्छा काल} \times \text{इच्छा धन}}{\text{प्रमाण काल} \times \text{प्रमाण धन}}$$

अथवा प्रमाण काल 1 तथा प्रमाणधन 100 होने पर–

$$\text{ब्याज } I = \frac{P.T.R}{100}$$

इसके अनुसार इन राशियों को इस प्रकार लिखेंगे–

$$x = \frac{5 \times 12 \times 60}{1 \times 100} = \frac{3600}{100} = 36/= \text{रु. ब्याज}$$

यह मूलतः समानुपात का प्रश्न है। यहाँ 100×1 का संगत पद 60×12 है। इसमें से 100 का संगत मान 5 बता दिया गया है। अन्य पद का समानुपाती मान ज्ञात करना है। अतः हम निम्न तालिका प्राप्त करते हैं–

$$100^a : 60 \times 12^c :: 5^b : x^d$$

अब पूर्वोक्त $a \times d = b \times c$ के नियमानुसार–

$$100\,x = 5 \times 60 \times 12$$

अतः पूर्वोक्त समानुपात के सूत्र या समीकरण के नियमानुसार–

$$x = \frac{5 \times 60 \times 12}{100}$$

इस सामान्य नियम से हमने ठीक वही संक्रिया प्राप्त कर ली है, जिसका इस श्लोक में वर्णन किया गया है। इससे सिद्ध है कि ब्याज के ये प्रश्न मूलतः समानुपात के प्रश्न हैं।

ब्याज के ज्ञात होने के आधार पर इच्छा काल (T) ज्ञात करना–

यदि इसी प्रश्न का काल अज्ञात हो तो उसे इस प्रकार लिखेंगे–

100/= रु. का 5/= रु. ब्याज 1 महीने में बनता है तो 60/= का 36/= ब्याज कितने महीने में बनेगा।

यहाँ श्लोक की रीति के अनुसार उपरिलिखित तालिका में से स्थान-परिवर्तन करके बहुराशि पक्ष को अल्प राशि पक्ष के गुणनफल से भाग देने से अज्ञात राशि काल ज्ञात होता है। जैसे–

तालिका–

प्रमाण राशि पक्ष	इच्छा राशि पक्ष
1	0
100	60
5	36

स्थान परिवर्तन करके भाग देने पर–

बहुराशिपक्ष ⇒ $1 \times 100 \times 36$

अल्पराशिपक्ष ⇒ 60×5 $= \frac{3600}{300} = 12$ मास

वास्तव में बीजगणितीय सामान्य समीकरण से इसका सूत्र प्राप्त हो सकता है। प्रमाण-काल 1 तथा प्रमाण-धन 100 होने पर–

$$\text{ब्याज} = \frac{\text{प्र.फ.} \times \text{इ.का.} \times \text{इ.ध.}}{100}$$

$$\therefore \text{इच्छाकाल} = \frac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{प्र.फ.} \times \text{इ.ध.}}$$

अथवा–

$$I. = \frac{P. \times T. \times R.}{100}$$

$$T. = \frac{I. \times 100}{P. \times R.}$$

स्पष्टतः ऊपर श्लोकानुसार यही संक्रिया की गई है। यह प्रश्न व्युत्क्रमानुपात तथा समानुपात दोनों का होने से इसमें मूलतः उपरिलिखित दोनों सूत्र क्रियाशील हैं। यहाँ मूलधन तथा काल का व्युत्क्रमानुपात है। क्योंकि एक निश्चित ब्याज की प्राप्ति के लिये ज्यों-ज्यों मूलधन बढ़ता है (या घटता है) त्यों-त्यों काल घटता है। (या बढ़ता है) साथ ही ब्याज तथा काल का समानुपात है। क्योंकि एक निश्चित मूलधन का काल बढ़ने पर उसी अनुपात में ब्याज भी बढ़ता है। अतः पहले व्युत्क्रमानुपात का सूत्र लगाकर बाद में समानुपात का सूत्र लगाकर अथवा इसके विपरीत क्रम से भी हल किया जा सकता है। जैसे–

काल का मूलधन के साथ व्युत्क्रमानुपात–

मूलधन 100 60

काल (महीना में) 1 x

इस प्रकार $60 x = 100 \times 1$

$\therefore \quad x = \frac{100}{60}$ महीना

अथवा ऐकिक नियम

100/= का 5/= ब्याज 1 महीने में

1 का 5/= ब्याज 100×1 महीना

∴ 60/= का 5/= ब्याज $\frac{100}{60}$ महीने में

काल का ब्याज के साथ समानुपात–

ब्याज	5	36
काल (महीना में)	$\frac{100}{60}$	x

इस प्रकार $5x = 36 \times \frac{100}{60}$

$x = \frac{36 \times 100}{60 \times 5}$

अथवा ऐकिक नियम

60/= का 5/= ब्याज $\frac{100}{60}$ महीने में

60/= का 1/= ब्याज $\frac{100}{60 \times 5}$ महीना में

60/= का 36/= ब्याज $\frac{100 \times 36}{60 \times 5}$ महीना में

इस स्थिति को क्रम बदलकर भी प्रदर्शित किया जा सकता है। जैसे--

काल का ब्याज के साथ समानुपात–

ब्याज	5	36
काल (महीना में)	1	x

इस प्रकार $5x = 36$

$x = \frac{36}{5}$

अथवा ऐकिक नियम से–

100/= का 5/= ब्याज 1 महीने में

100/= का 1/= ब्याज $\frac{1}{5}$ महीने में

100/= का 36/= ब्याज $\frac{36}{5}$ महीने में

काल का मूलधन से व्युत्क्रमानुपात–

मूलधन	100	60
काल (महीना में)	$\frac{36}{5}$	x

इस प्रकार $60x = 100 \times \frac{36}{5}$

$x = \frac{100 \times 36}{5 \times 60}$

अथवा ऐकिक नियम से–

100/= का 36/= ब्याज $\frac{36}{5}$ महीने में

1/= का 36/= ब्याज $\frac{36}{5} \times 100$ महीने में

60/=का 36/=ब्याज $\frac{36 \times 100}{5 \times 60}$ महीने में

स्पष्टत: सभी उपायों से पूर्वोक्त सूत्र प्राप्त कर लिया गया है।

ब्याज (I) के ज्ञात होने पर इच्छाधन मूलधन ज्ञात करना–

इसके लिये प्रश्न को इस प्रकार प्रस्तुत करेंगे–

1 महीने में 5/= रु. ब्याज 100/= रु. मूलधन पर बनता है तो 12 महीने में 36/= ब्याज कितने मूलधन पर बनेगा।

यहाँ पूर्वोक्त तालिका–

1	12
100	0
5	36

स्थान-परिवर्तन करके भाग देने पर

$$\frac{\text{बहुराशि} \Rightarrow 100 \times 36 \times 1}{\text{अल्पराशि} \Rightarrow 12 \times 5} = 60 \text{ मूलधन}$$

बीजगणितीय सामान्य समीकरण से स्थान-परिवर्तन का नियम सर्वथा स्पष्ट है–

प्रमाण काल 1 तथा प्रधान धन 100 होने पर–

$$\text{ब्याज} = \frac{\text{प्र.फ.}^{R} \times \text{इ. का.}^{T} \times \text{इ.ध}^{P}}{100} \qquad \text{अथवा } I = \frac{P.T.R}{100}$$

$$\therefore \text{इ.ध (P.)} = \frac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{प्र.फ.} \times \text{इ.का.}} \qquad P = \frac{I \times 100}{T.R.}$$

यहाँ भी पूर्वोक्त के समान समानुपात तथा व्युत्क्रमानुपात दोनों वर्तमान हैं। किसी निश्चित समय में ब्याज का मूलधन के साथ समानुपात है। क्योंकि ब्याज बढ़ने पर मूलधन भी बढ़ता है। इस प्रकार

5 : 100 : : 36 : x

अथवा

ब्याज ⇒	5	36
मूलधन ⇒	100	x

साथ ही किसी निश्चित ब्याज में काल का मूलधन के साथ व्युत्क्रमानुपात है। क्योंकि काल के बढ़ने या घटने पर मूलधन घटता या बढ़ता है। अतः –

1 : 12 : : x : 720

अथवा

काल	1	12
मूलधन	720	x

इस प्रकार समा. तथा व्युत्क्रमा. के दोनों सूत्रों का प्रयोग करते हुए भी वही उपरिलिखित परिणाम प्राप्त करते हैं–

1 महीने में 5/= ब्याज 100/= मूलधन में

समानुपाती विवरण→1 महीने में 1/= ब्याज $\frac{100}{5}$ रु. मूलधन में

1 महीने में 36/= ब्याज $\frac{100 \times 36}{5}$ = 720/= मूलधन में

व्युत्क्रमानुपाती विवरण→12 महीने में 36/= ब्याज

विवरण व्युत्क्रमा. है, अतः भाग देने पर ⇒ $\frac{100 \times 36}{5 \times 12} = 60$ मूलधन में

स्पष्टतः इस संक्रिया से भी हमने वही परिणाम प्राप्त कर लिया है।

ब्याज के ज्ञात होने पर प्रमाण फल (R) ज्ञात करना–

प्रश्न इस प्रकार प्रस्तुत करेंगे–

12 महीने में 60/= रु. पर ब्याज 36/= बनता है तो 1 महीने में 100/= पर कितना ब्याज बनेगा।

अथवा

12 महीने में 60/= रु. पर 36/= ब्याज कितने प्रतिशत मासिक दर पर बनेगा।

यहाँ पूर्वलिखित तालिका–

1	12
100	60
0	36

स्थान परिवर्तन से ⇒ $\frac{\text{बहुराशि}}{\text{अल्पराशि}}$ $\frac{100 \times 36}{12 \times 60} = \frac{3600}{720} = 5$

बीजगणितीय समीकरण से स्थान-परिवर्तन का नियम स्पष्ट है। प्रमाण काल 1 तथा प्रमाणधन 100 होने पर–

$$\text{ब्याज} = \frac{\text{प्र.फ. (R)} \times \text{इ.का. (T.)} \times \text{इ.ध. (P.)}}{100}$$

$$\therefore \text{प्रमाण फल (R)} = \frac{\text{ब्याज (I)} \times 100}{\text{इ.का.} \times \text{इ.ध}}$$

अथवा

$$I = \frac{P.T.R.}{100}$$

अतः

$$R = \frac{I \times 100}{T.P.}$$

पूर्वोक्त सूत्रों से भी यही परिणाम प्राप्त है–

12 महीने में 60/= पर ब्याज 36/=

1 ,, 60/= पर ब्याज $\frac{36}{12}$/=

1 ,, 1/= पर ब्याज $\frac{36}{60\times12}$

1 ,, 100/= पर ब्याज $\frac{36\times100}{60\times12} = \frac{3600}{720} = 5$

ब्याज के ज्ञात होने पर प्रमाण काल (period) ज्ञात करना–

प्रश्न इस प्रकार प्रस्तुत करेंगे–

60/= रु. का 36/= ब्याज 12 महीने में बनता है तो 100/= का 5/= रु. ब्याज कितने महीने में बनेगा।

यहाँ पूर्वलिखित तालिका

0 12

100 60 स्थान परिवर्तन से $\frac{100\times36}{12\times5\times60} = \frac{3600}{3600} = 1$

5 36

इस प्रश्न में पूर्वोक्त प्रश्नों से भिन्न प्रमाणकाल 12 महीने तथा प्रमाण-धन 60 है। अत: पूर्वोक्त प्रश्नों में जो 1 प्रमाण काल था, वह यहाँ इच्छा-काल के रूप में ज्ञातव्य हो गया है। इस दशा में ब्याज (I) तथा परिवर्तित इच्छित काल का सूत्र यह होगा–

R T P

ब्याज $= \frac{36\times1\times100}{60\times12}$ (प्र.ध. 60 × 12 प्र.का.)

अत: इच्छित काल (T.) $= \frac{...5\times60\times12}{36\times100} = 1$

ऐकिक नियम से भी यही परिणाम प्राप्त है

60/= का 36/= ब्याज 12 महीने में

60/= का 1/= ब्याज $\frac{12}{36}$ महीने में –

60/= का 5/= ब्याज $\frac{12}{36} \times 5$ महीने में

1/= का 5/= ब्याज $\frac{12\times5\times60}{36} = 100$ महीने में

100/= का 5/= ब्याज $\frac{12\times5\times60}{36\times100}$ = 1 महीने में

अथ भिन्नोदाहरणम्

सार्धस्य शतस्य फलं मासत्र्यंशेन रूपमध्यर्धम्।
विचरणसप्तदशानां किं फलमर्धाष्टमैर्मासैः[१]।। ४५।।

न्यासः $\frac{1}{3}$ $\frac{15}{2}$

$\frac{201}{2}$ $\frac{67}{4}$ लब्धं फलम् 5 कालाद्याप्तिः प्राग्वत्

$\frac{3}{2}$ 0 $\frac{5}{8}$

सुक्षेमा अनुवाद-[प्र.का.] $\frac{1}{3}$ मास में $100\frac{1}{2}$ या 201/2 [प्र.ध.] रूप का $1\frac{1}{2}$ या $\frac{3}{2}$ रूप ब्याज प्राप्त होता है, तो $7\frac{1}{2}$ = $\frac{15}{2}$ [इ.का.] मास में 17 – $\frac{1}{4}$ [इ.ध.] अर्थात् $16\frac{3}{4}$ या $\frac{67}{4}$ रूप का कितना ब्याज होगा।

यहाँ ब्याज का पूर्वोक्त सूत्र–

ब्याज = $\frac{\text{प्रमाणफल} \times \text{इच्छाकाल} \times \text{इच्छाधन}}{\text{प्रमाणकाल} \times \text{प्रमाण धन}}$

तदनुसार $\Rightarrow \frac{3}{2} \times \frac{15}{2} \times \frac{67}{4} \times \frac{3}{1} \times \frac{2}{201} = \frac{18090}{3216} = 5 + \frac{2010}{3216}$

$2010 \div 402 = 5$

$3216 \div 402 = 8$

अतः $5 + \frac{5}{8}$ रूप ब्याज

ज्ञात ब्याज के आधार पर काल–

सूत्र–

इ. का. (T.) = $\frac{\text{ब्याज} \times \text{प्र. का.} \times \text{प्र. ध.}}{\text{प्र. फ.} \times \text{इ. ध.}}$

अतः $\frac{45}{8} \times \frac{1}{3} \times \frac{201}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{67} = \frac{72360}{9648}$

$= 7 + \frac{4824}{9648} = 7\frac{1}{2}$ या $\frac{15}{2}$

ज्ञात ब्याज के आधार पर इ.ध. या मूलधन–

१. तुल. पाटी-गणित उदा. 40, ग.सा.सं. 5.34, ग.ति.पृ. 76

सूत्र–

$$\text{इ.ध.} = \frac{\text{ब्याज} \times \text{प्र. का.} \times \text{प्र. ध.}}{\text{प्र. फ.} \times \text{इ. का.}}$$

$\frac{45}{8} \times \frac{1}{3} \times \frac{201}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{15} = \frac{36180}{2160} = 16\ \frac{1620}{2160}$

$1620 \div 540 = 3 \quad 2160 \div 540 = 4$

$= 16\frac{3}{4}$ रूप इ. ध.

ज्ञात ब्याज के आधार पर प्रमाणफल (R.)

$$\text{प्र. फ. (R.)} = \frac{\text{ब्याज} \times \text{प्र. का.} \times \text{प्र. ध.}}{\text{इ. का.} \times \text{इ. ध.}}$$

$\frac{45}{8} \times \frac{1}{3} \times \frac{201}{2} \times \frac{2}{15} \times \frac{4}{67} = \frac{72360}{48240}$

$1\ \frac{24120}{48240} = 1\ \frac{1}{2}$ रूप

षोडशवार्णिकहेम्नः षष्टिर्मूल्यं यदा सुवर्णस्य।
कथय तदा दशवार्णिकषष्टेस्त्रियुक्तायाः[१]।। ४६।।

न्यासः 16 10 लब्धं रूपाणि 2362
60 63 $\frac{1}{2}$

सुक्षेमा अनुवाद-यदि 16 वर्ण वाले 1 'सुवर्ण' का मूल्य 60 रूप है तो 10 वर्ण वाले 63 'सुवर्ण' का क्या मूल्य होगा।

अनुशीलन-

16 वर्ण वाले 1 सोने का मूल्य 60 रूप

1 वर्ण वाले 1 सोने का मूल्य $\frac{60}{16}$

10 वर्ण वाले 1 सोने का मूल्य $\frac{60 \times 10}{16}$

10 वर्ण वाले 63 सोने का मूल्य $\frac{60 \times 10 \times 63}{16} = \frac{37800}{16}$

$= 2362\ \frac{8}{16} = 2362\ \frac{1}{2}$ रूप

---

१. तुल. पाटी-गणित उदा. 41, ग.सा.सं. 5.35

अन्यदुदाहरणम्

षोडशवार्णिककाञ्चनसुवर्णमूल्यं त्रिसप्ततिर्यत्र।
तत्रैकादशवार्णिकसार्धसुवर्णस्य किं भवति।। ४७।।

16 11

1 लब्धं रूपाणि $75\frac{9}{32}$

73 $\frac{3}{2}$

सुक्षेमा अनुवाद-यदि 16 वर्ण वाले 1 'सुवर्ण' का मूल्य 73 रूप है तो 11 वर्ण वाले $\frac{3}{2}$ 'सुवर्ण' का मूल्य क्या होगा।

अनुशीलन-

16 वर्ण वाले 1 सोने का मूल्य 73 रूप

1 वर्ण वाले 1 सोने का मूल्य $\frac{73}{16}$

11 वर्ण वाले 1 सोने का मूल्य $\frac{73\times11}{16}$

11 वर्ण वाले $\frac{3}{2}$ सोने का मूल्य $\frac{73\times11\times3}{2\times16} = \frac{2409}{32} = 75\frac{9}{32}$ रूप

अन्यदुदाहरणम्

कल्याणसुवर्णदलं गुञ्जोनं सार्धविंशतिं लभते।
सार्धैकादशवार्णिक-गुञ्जात्रितयं किमाप्नोति[१]।। ४८।।

न्यास: $\frac{16}{1}$ $\frac{23}{2}$

39 3 लब्धं रूपं 1 भागा: $\frac{111}{832}$

$\frac{41}{2}$ 0

सुक्षेमा अनुवाद-यदि 16 वर्ण वाले 'कल्याणसुवर्ण' नामक सिक्के के आधे में 1 गुञ्जा कम अर्थात् 39 गुञ्जा को[२] $20\frac{1}{2}$ या $\frac{41}{2}$ रूप में प्राप्त करता है तो $11\frac{1}{2}$ या $\frac{23}{2}$ वर्ण वाली 3 गुञ्जा कितने मूल्य में प्राप्त करेगा।

16 वर्ण के 39 गुञ्जा का मूल्य $\frac{41}{2}$ रूप

1 वर्ण के 39 गुञ्जा का मूल्य $\frac{41}{2\times16}$

---

१. तुल. पाटी-गणित उदा. 42

२. 80 गुञ्जा का एक 'सुवर्ण' होता है। द्रष्टव्य-त्रिशतिका श्लोक 5।

$\frac{23}{2}$ वर्ण के 39 गुञ्जा का मूल्य $\frac{41}{2} \times \frac{1}{16} \times \frac{23}{2}$

$\frac{23}{2}$ वर्ण के 1 गुञ्जा का मूल्य $\frac{41}{2} \times \frac{1}{16} \times \frac{23}{2} \times \frac{1}{39}$

$\frac{23}{2}$ वर्ण के 3 गुञ्जा का मूल्य $\frac{41}{2} \times \frac{1}{16} \times \frac{23}{2} \times \frac{1}{39} \times \frac{3}{1} = \frac{2829}{2496}$

$\Rightarrow 1 \frac{333}{2496} \qquad = 1 \frac{111}{832}$

अन्यदुदाहरणम्

अष्टौ व्रीहिद्रोणा नीयन्ते योजनं पणैः षड्भिः।
खारी द्रोणेन युता कियता वद योजनत्रितयम्[१]।। ४९।।

न्यासः 8 17

1 3 लब्धं पुराणौ 2। पणाः 6। काकिणी 1

6

सुक्षेमा अनुवाद-8 द्रोण व्रीहि को 1 योजन पहुँचाने की भार ढुलाई 6 पण बनती है। तो 17 द्रोण व्रीहि को 3 योजन पहुँचाने की ढुलाई कितनी होगी।

अनुशीलन-

8 द्रोण व्रीहि 1 योजन 6 पण में।

1 द्रोण व्रीहि 1 योजन $\frac{6}{8}$ पण में

17 द्रोण व्रीहि 1 योजन $\frac{6 \times 17}{8}$ पण में

17 द्रोण व्रीहि 3 योजन $\frac{6 \times 17 \times 3}{8} = \frac{306}{8}$ पण $= \frac{153}{4}$ पण

$= 38 + \frac{1}{4}$ पण $= 2$ पुराण, $6 + \frac{1}{4}$ पण या 6 पण 1 काकिणी

अन्यदुदाहरणम्

यदि कर्मकरत्रितयं दिवसद्वितयेन पञ्च प्राप्नोति।
कर्मकरा अष्ट जना नवभिर्दिवसैः किमाचक्ष्व[२]।। ५०।।

न्यासः 3 8

2 9 लब्धं रूपाणि 60

5

---

१. तुल. पाटी-गणित उदा. 43

२. तुल. पाटी-गणित उदा. 44

इति पञ्चराशिकं समाप्तम्।

सुक्षेमा अनुवाद-यदि 3 मजदूर 2 दिन में 5 रूप प्राप्त करते हैं, तो 8 मजदूर 9 दिन में कितना पाएँगे।

3 मजदूर 2 दिन में 5 रूप पाते हैं।

3 मजदूर 1 दिन में $\frac{5}{2}$ रूप पाएँगे।

3 मजदूर 9 दिन में $\frac{5\times9}{2}$ रूप पाएँगे।

1 मजदूर 9 दिन में $\frac{5\times9}{2\times3}$ रूप

8 मजदूर 9 दिन में $\frac{5\times9\times8}{2\times3}$ रूप $= \frac{360}{6} = 60$ रूप

सप्तराशिके उदाहरणम्

द्विकव्यासाष्टकायामः कम्बलो लभते दश।
ततोऽन्यौ त्रिकव्यासौ नवायामौ किमाप्नुतः[१]।। ५१।।

न्यासः 2 3
8 9 लब्धं रूपाणि 33 $\frac{3}{4}$
1 2
10

इति सप्तराशिकोदाहरणम्

सुक्षेमा अनुवाद-यदि 2 व्यास या चौड़ाई तथा 8 आयाम अर्थात् लम्बाई वाले 1 कम्बल को 10 रूप में प्राप्त करता है तो 3 चौड़ाई तथा 9 लम्बाई वाले 2 कम्बल को कितने रूप में पाएगा।

$2\times8 = 16$ वर्ग क्षेत्रफल वाला 1 कम्बल 10 रूप में

1 वर्ग क्षेत्रफल वाला 1 कम्बल $\frac{10}{16}$ रूप में

$3\times9 = 27$ वर्ग क्षेत्रफल वाला 1 कम्बल $\frac{10\times27}{16}$ रूप में

१. तुल. पाटी-गणित उदा. 45

27 वर्ग क्षेत्रफल वाला 2 कम्बल $\frac{10\times27\times2}{16}$ रूप में $\frac{540}{16}$

$= \frac{270}{8} = 33\frac{6}{8} = 33\frac{3}{4}$ रूप

नवराशिके उदाहरणम्

आयामव्यासपिण्डेषु नवपञ्चैकहस्तका।
लभ्यन्तेऽष्टौ शिला द्वे किं दशसप्तद्विहस्तके[१]।। ५२।।

न्यासः 1 2

9 10 लब्धम् $49\frac{7}{9}$

5 7

1 2

8 0

सुक्षेमा अनुवाद-9 हाथ लम्बी, 5 हाथ चौड़ी 1 हाथ मोटी 1 शिला 8 रूप में मिलती है तो 10 हाथ लम्बी, 7 हाथ चौड़ी 2 हाथ मोटी 2 शिला कितने रूप में मिलेगी।

$9\times5\times1 = 45$ घन आयतन की 1 शिला 8 रूप में

1 घन आयतन की 1 शिला $\frac{8}{45}$ रूप में

$10\times7\times2 = 140$ घन आयतन की 1 शिला $\frac{8\times140}{45}$ रूप में

140 घन आयतन की 2 शिला $\frac{8\times140\times2}{45} = \frac{2240}{45}$

$= \frac{448}{9} = 49\frac{7}{9}$ रूप में

अन्यदुदाहरणम्

द्विव्यासषट्समुच्छ्रयसप्तायामस्य हस्तिनो द्रोणः।
त्रिव्यासनवसमुच्छ्रयदशदैर्घ्यगजस्य किं भुक्तौ[२]।। ५३।।

१. तुल. पाटी-गणित उदा. 46

२. तुल. पाटी-गणित उदा. 47

	1	1
न्यासः	2	3 लब्धं द्रोणाः 3। प्रस्थाः 3 । कुडवः 1 कुडवभागाश्च $\frac{5}{7}$
	6	9
	7	10
	1	0

इति नवराशिकम्

सुक्षेमा अनुवाद-2 हाथ चौड़े, 6 हाथ ऊँचे, 7 हाथ लम्बे 1 हाथी के लिये 1 द्रोण आहार खर्च होता है। तो 3 हाथ चौड़े 9 हाथ ऊँचे 10 हाथ लम्बे 1 हाथी के लिये कितना आहार लगेगा।

$2\times6\times7 = 84$ घन विस्तार वाले 1 हाथी के लिए 1 द्रोण

1 घन विस्तार वाले 1 हाथी के लिए $\frac{1}{84}$ द्रोण

270 घन विस्तार वाले 1 हाथी के लिए $\frac{1\times270}{84} = \frac{135}{42}$ द्रोण

$\frac{135}{42} = 3\frac{9}{42}$ द्रोण, $\frac{9}{42}\times16 = \frac{144}{42} = 3\frac{18}{42}$ प्रस्थ

$\frac{18}{42}\times4 = \frac{72}{42} = 1\frac{30}{42}$ कुडव, $\frac{30}{42} = \frac{5}{7}$ कुडवभाग

भाण्डप्रतिभाण्डके सूत्रम्

विपरीतकृते मूल्ये भाण्डप्रतिभाण्डके विधिः पूर्वः[१]।

सुक्षेमा अनुवाद-भाण्ड प्रतिभाण्डक में मूल्य, फल आदि को विपरीत रीति से स्थान-परिवर्तन करके पूर्वोक्त विधि करने से अज्ञात राशि प्राप्त होती है।

अनुशीलन-भाण्ड का अर्थ वस्तु है तथा प्रतिभाण्ड विनिमय द्वारा प्राप्त वस्तु है। यह विधि वस्तु-विनिमय की अज्ञात राशि का ज्ञान कराती है। अतः इसे 'वस्त-विनिमय गणित' भी कहा जाता है।

उदाहरणम्

शुण्ठ्या पलद्वयं षड्भिः पिप्पल्या नवभिः पणैः।
ततः शुण्ठ्याः पलैः षड्भिः पिप्पली कियती भवेत्[२]।। ५४।।

---

१. तुल. ब्रा.स्फु.सि. 12.13, पाटी-गणित सू. 46, ग.सा.सं. 6.18, म.सि. 15.28, ग.ति.पृ. 80 सि.शे. 13.16, लीलावती

२. तुल. पाटी-गणित उदा. 48, ग.सा.सं. 6.19-20

न्यासः।। 6 9
2 1 लब्धं पिप्पलीपलद्वयम्
6 0

सुक्षेमा अनुवाद-6 पण से सोंठ के 2 पल तथा 9 पण से पीपल के 1 पल प्राप्त होते हैं तो 6 पल सोंठ से कितनी पीपल प्राप्त होगी।

अनुशीलन-यहाँ 6, 2, 6 प्रमाण-पक्ष है तथा 9, 1 इच्छा पक्ष है। इसका स्थान-परिवर्तन करके इस प्रकार लिखते हैं-

$$\frac{6\times1\times6}{9\times2} = \frac{36}{18} = 2 \text{ पल}$$

इस प्रश्न के लिये पहले 1 पण के सापेक्ष दोनों वस्तुओं का समानुपाती परिमाण स्थापित करते हैं। पुनः इस समानुपाती परिमाण के एक संगत मान के आधार पर अन्य संगत मान ज्ञात करते हैं। जैसे-

1 पण के सापेक्ष समानुपाती परिमाण-

(I) 6 पण से सोंठ के 2 पल

तो 1 पण से सोंठ के $\frac{2}{6}$ पल

अतः समानुपात $\Rightarrow 6 : 2 : : 1 : \frac{2}{6}$

(II) 9 पण से पीपल के 1 पल

तो 1 पण से पीपल के $\frac{1}{9}$ पल

अतः समानुपात $\Rightarrow 9 : 1 : : 1 : \frac{1}{9}$

इस प्रकार 1 पण के सापेक्ष $\frac{2}{6}$ पल सोंठ तथा $\frac{1}{9}$ पल पीपल समानुपाती हैं। $\frac{2}{6}$ का संगत मान 6 दिया हुआ है। अतः यह तालिका प्राप्त होती है-

$\frac{2}{6}$ $\frac{1}{9}$

6 x अथवा $\frac{2}{6} : 6 : : \frac{1}{9} : x$

अतः $\frac{2}{6} x = \frac{1}{9} \times 6$

$\Rightarrow x = \frac{1}{9} \times \frac{6}{1} \times \frac{6}{2} = \frac{36}{18} = 2$

इस प्रकार हमने उपरिलिखित विधि प्राप्त कर ली है।

अन्यदुदाहरणम्

पणाभ्यां षोडशाम्राणि कपित्थानां शतं त्रिभिः।
षड्भिराम्रैः कपित्थानि लभ्यन्ते कति कथ्यताम्।। ५५।।

न्यासः 2　3

16　100　लब्धं कपित्थानि 25

6　0

इति भाण्डप्रतिभाण्डकम्

सुक्षेमा अनुवाद-2 पण से 16 आम तथा 3 पण से 100 कैथा प्राप्त होते हैं तो 6 आम के बदले में कितने कैथा प्राप्त होंगे।

अनुशीलन-यहाँ 2, 16, 6 प्रमाण-पक्ष तथा 3, 100 इच्छा पक्ष है। यहाँ भी पूर्ववत् स्थान-परिवर्तन करके-

$$\frac{2\times100\times6}{3\times16} = \frac{1200}{48} = 25 \text{ कैथा}$$

यहाँ भी पहले 1 पण के सापेक्ष वस्तु-संख्या प्राप्त करते हैं-

(I)　2 पण से 16 आम

1 पण से $\frac{16}{2}$ आम

(II)　3 पण से 100 कैथा

1 पण से $\frac{100}{3}$ कैथा

अब प्रश्न का आकार यह होता है-

'यदि 1 पण से $\frac{16}{2}$ आम तथा 1 पण से 100/3 कैथा हैं तो 6 आम के बदले में कितने कैथा प्राप्त होंगे।

इससे यह तालिका प्राप्त करते हैं-

$\frac{16}{2}$　$\frac{100}{3}$

6　x　अथवा $\frac{16}{2} : 6 :: \frac{100}{3} : x$

अतः $\frac{16}{2} x = \frac{100}{3} \times \frac{6}{1}$

$$x = \frac{100\times6\times2}{3\times1\times16} = \frac{1200}{48} = 25$$

इस प्रकार हमने उपरिलिखित विधि प्राप्त कर ली है।

जीवस्य विक्रयः स्यात् स एव परिवर्तिते वयसि[१]।। ३२।।

१. तुल. पाटी-गणित सू. 46, ग.ति.पृ. 81, सि.शे. 13.16, ग.कौ. 1.53

सुक्षेमा अनुवाद-जीव के विक्रय वाले प्रश्नों में वयः को स्थान्तरित करके वही पूर्वोक्त पाञ्चराशिक विधि अपनाई जाती है।

उदाहरणम्

षोडशवर्षाणां यदि पञ्च लभन्ते शतद्वयं विद्वन्।
तत् किं विंशति वर्षे उभे लभेते ममाचक्ष्व[१]।। ५६।।

न्यासः 5 2

16 20 लब्धं पुराणाः 64

200 0

इति जीवविक्रयः।

सुक्षेमा अनुवाद-हे विद्वन्! 16 बरस की 5 दासियाँ 200 पुराण प्राप्त करती हैं। तो 20 बरस की 2 दासियाँ कितना प्राप्त करेंगी।

अनुशीलन-यह उदाहरण उस काल में दास-दासियों के क्रय-विक्रय की प्रथा को प्रकट करता है। यह समानुपात, व्यस्तत्रैराशिक या व्युत्क्रमानुपात दोनों का उदाहरण है। क्योंकि जैसे-जैसे दासियों की संख्या बढ़ती है, उनका मूल्य भी बढ़ता है। साथ ही जैसे-जैसे दासियों की उम्र बढ़ती है, उनका मूल्य घटता है[२]। अतः समानु., व्युत्क्रमा. के सूत्रों के समन्वय के साथ-

16 बरस की 5 दासियाँ 200 पुराण प्राप्त करती हैं

अतः 20 बरस की 2 दासी $\frac{200\times16\times2}{5\times20} = \frac{6400}{100} = 64$ पुराण

अथ मिश्रकव्यवहारे शुद्धस्थानलाभे करणसूत्रमार्या

निजकालेनाहन्यात् प्रमाणराशिं फलेन परकालम्।
तौ स्वयुतिहृतौ स्यातां मिश्रगुणौ मूलवृद्धिधने[३]।। ३३।।

सुक्षेमा अनुवाद-प्रमाण राशि (standard principal = SP) (सामान्यतः 100) को निज काल याने प्रमाण काल (standard period = y) से गुणन करे।

---

१. पाटी-गणित उदा. 50, ग.सा.सं. 5.40, ग.ति.पृ. 81, ग.कौ.पृ. 53 लीलावती

२. उम्र बढ़ने से मल्य घटता है→ भुज्यमानवस्त्रन्यायेन क्षणात् क्षणे जीर्णतापत्तौ मूल्यापचयात्। यावत्तु वयः सारानन्तरं तावदपचीयते मूल्यमधिकवयसः, तात्त्विकमूल्यमनवयसस्तूपचीयते - पाटी-गणित श्लोक 50 पर टीका पृ. 52

३. तुल. ब्रा.स्फु.सि. 12.14, पाटी-गणित सू. 47, ग.सा.सं. 6.21-23, म.सि. 15.31, ग.ति.पृ. 82, सि.शे. 13.17 लीलावती

पश्चात् प्रमाणफल (rate) को परकाल (time) से गुणा करे। इन दोनों गुणनफल को जोड़ देवे। पश्चात् इस गुणनफल से मिश्रधन (Amount) प्रमाण राशि (SP) प्रमाण काल (y) के गुणनफल को विभक्त करें। इससे मूलधन (Principal) प्राप्त होता है।

साथ ही पूर्वोक्त गुणनफल से मिश्रधन (A) तथा गुण अर्थात् प्रमाण फल (R) तथा मिश्रकाल या परकाल (t) के गुणनफल को विभक्त करने से ब्याज (I) प्राप्त होता है।

इससे हमें मूलधन तथा ब्याज ज्ञात करने के लिये यह सूत्र प्राप्त होता है–

$$\text{मूलधन} = \frac{\text{मिश्रधन} \times \text{प्रमाण धन} \times \text{प्रमाणकाल}}{\text{प्रमाण धन} \times \text{प्रमाणकाल} + \text{परकाल} \times \text{प्रमाणफल}}$$

$$\text{अथवा } P = \frac{A \times SP \times Y}{SP \times Y + t \times R}$$

$$\text{ब्याज} = \frac{\text{मिश्रधन} \times \text{पर काल} \times \text{प्रमाणफल}}{\text{प्रमाण धन} \times \text{प्रमाणकाल} + \text{परकाल} \times \text{प्रमाणफल}}$$

$$\text{अथवा } I = \frac{A \times t \times R}{SP \times Y + t \times R}$$

उदाहरणम्

मासेन पञ्चकशते मूलफलैक्यं चतुर्विहीनशतम्।
दृष्टं वर्षेण सखे किं मूलं तत्र किं च फलम्[१]।। ५७।।

न्यासः 1 12

100 96 लब्धं मूलधनम् 60। वृद्धिः 36

5

सुक्षेमा अनुवाद-5/= रु. सैकड़ा मासिक ब्याज की दर से एक वर्ष में मूलधन तथा ब्याज (अर्थात् मिश्रधन) 96 होता है। तो इसका अलग-2 मूलधन तथा ब्याज बताओ।

अनुशीलन-प्रस्तुत उदाहरण में पूर्वोक्त सूत्र के द्वारा मिश्रधन के परिज्ञान के आधार पर मूलधन तथा ब्याज का पता लगाया गया है। यहाँ 5/= प्रमाणफल (rate), सैकड़ा या 100/= प्रमाण राशि (standard Principal= SP), 1 महीना

१. तुल. पाटी-गणित उदा. 52, ग.सा.सं. 6.22-24, ग.ति.पृ. 83, ग.कौ.पृ. 60 लीलावती

प्रमाण काल (standard period = y), 1 वर्ष या 12 महीना परकाल (time), 96/= रु. मिश्रधन (Amount) है। अब पूर्वोक्त सूत्र के अनुसार–

$$\text{मूलधन} = \frac{96\times100\times1}{100\times1+12\times5} = \frac{9600}{160} = 60$$

$$\text{ब्याज} = \frac{96\times12\times5}{100\times1+12\times5} = \frac{5760}{160} = 36$$

यह सूत्र मूलतः समानुपात से सम्बन्धित है। अतः उन नियमों से इसे प्राप्त किया जा सकता है। इसके लिये पहले 100/= मूलधन पर 5/= सैकड़ा मासिक ब्याज की दर से मिश्रधन ज्ञात करते हैं–

100/= मूलधन पर 5/= सैकड़ा मासिक ब्याज की दर से 12 मास का ब्याज $12 \times 5 = 60$

अतः 100/= का मिश्रधन $100\times1+12\times5 = 160$

160/= मिश्रधन पर 100/= मूलधन

1/= मिश्रधन पर $\frac{100\times1}{100\times1+12\times5} = \frac{100}{160}$

96/= मिश्रधन पर $\frac{96\times100\times1}{100\times1+12\times5} = \frac{9600}{160} = 60$ मूलधन

इस प्रकार हमने मूलधन का ज्ञान करते हुए ठीक उपरिलिखित सूत्र प्राप्त कर लिया है।

अब 160/= मिश्रधन पर $12\times5 = 60$/= ब्याज

1/= मिश्रधन पर $\frac{12\times5}{100\times1+12\times5} = \frac{60}{160}$ ब्याज

96/= मिश्रधन पर $\frac{96\times12\times5}{100\times1+12\times5} = \frac{5760}{160} = 36$ ब्याज

इस प्रकार पुनः वही सूत्र प्राप्त हो गया है।

यहाँ 160/= मिश्रधन का प्रश्नोक्त समय तथा दर के हिसाब से 100/= मूलधन प्राप्त किया गया है। इस अनुपात की 96 मिश्रधन के आधार पर समानुपात की खोज की गई है। इस प्रकार हमें यह अनुपात प्राप्त होता है–

$$160 : 100 :: 96 : x$$

समानुपात के सूत्रानुसार–

$$160\,x = 100 \times 96$$

$$x = \frac{100 \times 96}{160} = \frac{9600}{160} = 60/=$$ मूलधन

इसी प्रकार 160/= मिश्रधन के अन्तर्गत का 60/= ब्याज होने पर 96/= मिश्रधन के आधार पर मिश्रधन तथा ब्याज का यह समानुपात प्राप्त होता है–

$$160 : 60 : : 96 : x$$

$$160\,x = 60 \times 96$$

$$x = \frac{60 \times 96}{160} = \frac{5760}{160} = 36/=$$ ब्याज

इस प्रकार हमने समीकरण के सामान्य उपाय से पुनः वही सूत्र प्राप्त कर लिया है।

अथ भिन्नोदाहरणम्

सार्धस्य शतस्य फलं सपादमासेन रूपमध्यर्धम्।
फलमूलैक्यं षट्कृतिरर्धयुतार्धाष्टमैर्मासैः[१]।। ५८।।

न्यासः $\frac{5}{4}$ $\frac{15}{2}$

$\frac{201}{2}$ $\frac{73}{2}$ लब्धं मूलधनम् 33

$\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$ वृद्धिः 3

इति मिश्रव्यवहारः।

सुक्षेमा अनुवाद-$1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ महीने में $100\frac{1}{2} = 201/2$ रूप का ब्याज $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ रूप होता है तो $7\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$ मास में $6^2 = 36$ तथा $\frac{1}{2} = \frac{73}{2}$ मिश्रधन का मूलधन तथा ब्याज क्या होगा।

यहाँ पूर्वोक्त सूत्र को समन्वित करने से पहले राशियों को समानुपात में स्थापित करते हैं–

$\frac{5}{4}$ महीने में $\frac{201}{2}$ रूप का ब्याज $\frac{3}{2}/=$ रूप

1 महीने में $\frac{201}{2}$ रूप का ब्याज $\frac{3}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$ रूप

---

१. तुल. पाटी-गणित उदा. 53

1 महीने में 1 रूप का ब्याज $\frac{6}{5} \times \frac{2}{201} = \frac{12}{1005} = \frac{4}{335}$ रूप

1 महीने में 100 रूप का ब्याज $\frac{4}{335} \times 100 = \frac{400}{335} = \frac{80}{67}$ रूप

अब प्रश्न का आकार यह है–

$\frac{80}{67}$ रूप सैकड़ा मासिक ब्याज की दर से $\frac{15}{2}$ मास में $\frac{73}{2}$ मिश्रधन होता है। तो इसका मूलधन तथा ब्याज बताओ।

पूर्वोक्त सूत्रानुसार–

$$\frac{\frac{73}{2} \times 100 \times 1}{100 \times 1 + \frac{15}{2} \times \frac{80}{67}} = \frac{3650}{100 + \frac{600}{67}} \quad \frac{3650}{\frac{7300}{67}}$$

$$= 3650 \times \frac{67}{7300} = \frac{244550}{7300} = 33\tfrac{1}{2} \text{ रूप मूलधन}$$

इसी प्रकार

$$\frac{\frac{73}{2} \times \frac{15}{2} \times \frac{80}{67}}{100 \times 1 + \frac{15}{2} \times \frac{80}{67}} = \frac{\frac{43800}{134}}{\frac{7300}{67}} = \frac{21900}{67} \times \frac{67}{7300} = 3 \text{ रूप ब्याज}$$

ऐकिक नियम से यह हल आसानी से प्राप्त है। पूर्वोक्तानुसार–

1 महीने में 1 रूप का ब्याज $\frac{4}{335}$

$7\frac{1}{2}$ महीने में 1 रूप का ब्याज $\frac{4}{335} \times \frac{15}{2} = \frac{60}{670} = \frac{6}{67}$

अतः $7\frac{1}{2}$ महीने का मिश्रधन $1 + \frac{6}{67} = \frac{73}{67}$

$\frac{73}{67}$ मिश्रधन पर 1 रूप मूलधन

तो $\frac{73}{2}$ मिश्रधन पर मूलधन $\frac{73}{67} : 1 :: \frac{73}{2} : x$

$$\Rightarrow x = \frac{73}{2} \times \frac{67}{73} = \frac{67}{2} = 33\tfrac{1}{2} \text{ रूप मूलधन}$$

तथा $\frac{73}{2} - \frac{67}{2} = \frac{6}{2} = 3$ रूप ब्याज

अथ भाव्यक सूत्रम्

कालप्रमाणघातो गतकालहताः फलादयश्चैते।
स्वयुतिहृता मिश्रगुणा भवन्ति मूलादयः क्रमशः[१]।। ३४।।

---

१. तुल. परकालहताः - पाटी-गणित सू. 48, ग.ति.पृ. 83, सि.शे. 13.18

सुक्षेमा अनुवाद-प्रमाण-काल को प्रमाण-धन से गुणित करें। पश्चात् परकाल को प्रमाण-फल आदि अर्थात् भाव्यक या प्रतिभू, वृत्ति या गणक तथा ऋण-पत्र लेखक के अंश के योग से गुणित करे। इन दोनों के योगफल से मिश्रधन गुणित प्रमाण-धन तथा प्रमाण-काल को विभक्त करने से मूलधन प्राप्त होता है तथा इन योगफल से मिश्रधन गुणित परकाल तथा प्रमाण-फल को विभक्त करने से ब्याज प्राप्त होता है।

उदाहरणम्

मासेन शतस्य फलं पञ्चैको भाव्यकेऽर्धमथ वृत्तौ।
लेखकपादो वर्षे पञ्चाधिक-नवशती मिश्रम्।। ५९।।

1

न्यासः 100   12 मिश्रका भागा भाव्यकादीनाम् $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

5

मिश्रधनम् 905। लब्धं मूलधनम् 500 कलान्तरम् 300। भाव्यके 60 वृत्तौ 30। लेखकस्य 15। इति भाव्यकव्यवहारः।।

सुक्षेमा अनुवाद-100/= रु. पर 5/= मासिक ब्याज की दर से 1 वर्ष या 12 मास में 905/= मिश्रधन बनता है। इस ब्याज के साथ भाव्यक या जमानतदार के लिये 1% प्रतिमास, वृत्ति या गणक अर्थात् मुनीम के लिये $\frac{1}{2}$% प्रतिमास तथा ऋण पत्र लेखक के लिए $\frac{1}{4}$% प्रतिमास भी देय होता है। तो इस मिश्रधन का मूलध न, इसका ब्याज तथा जमानतदार, मुनीम तथा लेखक को प्राप्त होने वाला अलग-2 भाग भी बताओ।

अनुशीलन-यह सूत्र मिश्रकव्यवहार में मूलधन के लिये पूर्वोक्त सूत्र नं.33 के लिये समतुल्य है। अन्तर केवल यह है कि यहाँ ऋणदाता के लिये 5/= मासिक ब्याज के साथ-साथ जमानतदार, मुनीम तथा लेखक के लिए भी अलग-अलग निश्चित प्रतिशत देना है। अतः प्रस्तुत उदाहरण में $5 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{27}{4}$ प्रतिशत मासिक के हिसाब से उस बेचारे कर्जदार द्वारा धन चुकाया जाना है। अतः यहाँ परकाल को प्रमाणफल के साथ जमानतदार आदि के प्रतिशत भाग के योग के साथ गुणित किया जावेगा। इस प्रकार हमें यह सूत्र प्राप्त होता है-

सूत्र-

$$\text{मूलधन} = \frac{\text{मिश्रधन} \times \text{प्रमाण-धन} \times \text{प्रमाणकाल}}{\text{प्रमाण धन} \times \text{प्रमाणकाल} + (\text{सभी प्रमाणफलों का योग}) \times \text{परकाल}}$$

उदाहरण–

$$\frac{905 \times 100 \times 1}{100 \times 1 + (5 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})\, 12} = \frac{90500}{181} = 500 \text{ मूलधन}$$

$$\text{ब्याज} = \frac{\text{मिश्रधन} \times \text{परकाल} \times \text{प्रमाणफल}}{\text{प्रमाण धन} \times \text{प्रमाणकाल} + (\text{सभी प्रमाणफलों का योग}) \times \text{परकाल}}$$

उदाहरण–

$$\frac{905 \times 12 \times 5}{100 \times 1 + (5 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})\, 12} = \frac{54300}{181} = 300 \text{ ब्याज}$$

भाव्यक का धन =

100/=पर 1 मास में 1/=

100/=पर 12 मास में 12/=

500/=पर 12 मास में 12×5=60 रूप

अन्य के धन भी इसी प्रकार प्राप्त हैं। इन सभी सूत्रों की उपपत्ति पूर्वोक्त सूत्र नं. 33 में वर्णित ऐकिक नियम के समान है।

एकपत्रीकरणसूत्रम्

गतकालफलसमासो मासफलैक्योद्धृतो भवेत् कालः।
शतगुणमासफलैक्ये धनयोगहृते शतस्य फलम्[१]।। ३५।।

सुक्षेमा अनुवाद-अतीत काल के समस्त फल अर्थात् कुल ब्याज (I) को मास फल याने 1 महीने के ब्याज से विभक्त करने पर अतीत काल या ब्याज के कुल महीने ज्ञात होते हैं। (तालिका नं. 8)

(II) 100 से गुणित मास फल या कुल महीने के ब्याज को मूलधन से विभक्त करने पर 100/= का फल या ब्याज प्राप्त होता है। (तालिका नं. 9)

---

१. तुल. पाटी-गणित सू. 51, ग.सा.सं. 6.77, ग.ति.पृ. 86

उदाहरणम्

द्विके त्रिके चतुष्के च दत्तं स्वं पञ्चके शतम्।
एकं द्वे त्रीणि चत्वारि शतान्येषां यथाक्रमम्।। ६०।।

द्वौ त्रयं पञ्च चत्वारो गता मासा द्विसंगुणाः।
तत्कथं कथ्यतामेतैरेकं पत्रं भविष्यति[१]।। ६१।।

	$\frac{1}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{10}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{8}{1}$
न्यासः	100	100	100	200	100	300	100	400
	1	1	1	1	1	1	1	1
	$\frac{2}{1}$		$\frac{3}{1}$		$\frac{4}{1}$		$\frac{5}{1}$	

लब्धमतीतकालो मासा: 8। दिनानि 3। शतस्य फलम् 4 मूलधनम् 1000।।

सुक्षेमा अनुवाद- 2/=, 3/=, 4/=, 5/= सैकड़ा

मासिक की दर से क्रमशः 100/=, 200/=, 300/=, 400/= रूप

उधार दिये गए। इन कर्जों पर क्रमशः 2×2 = 4, 2×3 = 6, 2×5 = 10, 2×4 = 8 महीने बीत गए। तो इनका विवरण मूलक पत्र कैसे तैयार होगा। बताओ।

अनुशीलन-विवरण-पत्र आगे अंकित है। इसमें तालिका नं. 1 से 5 तक 'न्यास' के क्रम से प्रमाण-काल आदि का विवरण है। तालिका नं. 6, 7 में पाटी-गणित व्याख्या के अनुसार वर्णन है। तालिका नं. 8, 9 में श्लोक के अनुसार विवरण है-

---

१. प्रथमपत्रे गतकालफलं (तालिका 6), ...प्रतिपत्रं मासफलानि यथा...(तालिका नं. 7) पाटी-गणित व्याख्या उदा. 57

ब्याज का विवरण - पत्र

	१ प्रमाण काल standard period (y)-	२ प्रमाण धन standard Principal (SP)-,	३ प्रमाण फल (Rate) (R)	४ परकाल time (T)	५ मूलधन (Principal) (P.)	६ गतकालफल या (कुल ब्याज)तालिका 3×4×5	७ मासफल 1 महीने का ब्याज तालिका 3×5	८ सम्पूर्ण ब्याज के कुल महीने तालिका 6÷7	९ कुल महीने का 100/= का ब्याज
प्रथम खण्ड	1	100/=	2/= दर	4 महीना	100/=	2×4 = 8	2×1 =2	$\frac{8}{2}$ = 2	$\frac{100 \times 8}{100} = 8$ अथवा 4×2 = 8
द्वितीय खण्ड	1	100/=	3/=	6,,	200/=	3×6×2 =36	3×2 =6	$\frac{36}{6}$ = 6	$\frac{100 \times 36}{200} = 18$ अथवा 6×3 = 18
तृतीय खण्ड	1	100/=	4/=	10,,	300/=	4×10×3= 120	4×3 =12	$\frac{120}{12}$ = 10	$\frac{100 \times 120}{300} = 40$ अथवा 10×4 = 40
चतुर्थ खण्ड	1	100/=	5/= दर,	8,,	400/=,	5×8×4 = 160	5×4 =20	$\frac{160}{20}$ = 8	$\frac{100 \times 160}{400} = 40$ अथवा 8×5 = 40

विवरण - पत्र का निरूपण

तालिका नं. 1- यह प्रमाण-काल अर्थात् ब्याज जोड़ने के मानक काल प्रकट करता है।

तालिका नं. 2- यह प्रमाण धन अर्थात् ब्याज के मानक धन को सूचित करता है।

तालिका नं. 3- यह प्रमाण-फल (Rate) है। प्रथम खण्ड में 2/= रूप सैकड़ा ब्याज प्रकट करता है।

तालिका नं. 4- कर्ज की अवधि (जैसे प्रथम खण्ड में 4 महीना) को प्रकट करता है।

तालिका नं. 5- मूलधन को द्योतित करता है।

तालिका नं. 6- सम्पूर्ण महीने के कुल ब्याज को प्रकट करता है। जैसे प्रथम खण्ड में 2/= की दर से 4 महीने के 100/= का ब्याज बताया है। अत: $2\times4\times1=8$ हुआ।

तालिका नं. 7- सम्पूर्ण मूलधन का 1 मास का ब्याज वर्णित है। जैसे प्रथम खण्ड में 2/= की दर से 1 महीने का 100/= का ब्याज बताया है। अत: $2\times1\times1=2$

तालिका नं. 8 ⇒ सम्पूर्ण ब्याज के कुल महीने प्राप्त करने के लिये श्लोक 35 के (I) नियम में इसे प्रकट किया है।

तालिका नं. 9- कुल महीने का 100 का ब्याज प्राप्त करने के लिये श्लोक 35 के (II) नियम के अनुसार 100 से कुल ब्याज (तालिका नं. 6) को गुणित करके मूलधन (तालिका नं. 5) से विभक्त किया है।

वास्तव में इसे तालिका नं. 3 तथा 4 से गुणित करके आसानी से प्राप्त किया जा सकता है।

यहाँ तालिका नं. 6 के अन्तिम योग के अनुसार समस्त ब्याज का योग 324/= है तथा 1 महीने के कुल ब्याज का योग 40/= है। संस्कृत व्याख्या तथा तालिका नं. 3 के अनुसार 4 प्रकार के प्रमाण-फल (rate) हैं तथा तालिका नं. 5 के अनुसार मूलधन का कुल योग 1000/- है।

तालिका को क्रम से इस प्रकार पढ़ेंगे-- 1 महीने में 100/= रूप का का ब्याज 2/= है तो 4 महीने में 100/= का ब्याज 8/= तथा 1 महीने का ब्याज 2/= है। ब्याज के कुल 4 महीने हैं तथा सम्पूर्ण महीने के 100/= का ब्याज 8/= है।

अन्यदुदाहरणम्

पूर्वोक्तैरेव फलैः शतस्य रूपार्धसंयुतैः क्रमशः।
मासैश्च पक्षयुक्तैः कथय कथं पत्रमेकं स्यात्[१]।। ६२।।

कृतभागानुबन्धे न्यासो यथा

$\frac{1}{1}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{21}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{17}{2}$	लब्धमतीतकालः
100	100	100	200	100	300	100	400	मासाः 8। दिनानि16
1	1	1	1	1	1	1	1	
$\frac{5}{2}$		$\frac{7}{2}$		$\frac{9}{2}$		$\frac{11}{2}$		शतफलम् $4\frac{1}{2}$

लब्धं मूलधनम् 1000। यद्यतीतकाले दिनभागा भवन्ति ततस्तेषामृणिना धनिनः कलान्तरं दत्वा दिनभागानपास्यैकपत्रं क्रियत इति

सुक्षेमा अनुवाद-पूर्वोक्त ब्याज की दरों में आधा या $\frac{1}{2}$ संयुक्त करके अर्थात् $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{11}{2}$ सैकड़ा मासिक की दर से 100/=, 200/=, 300/=, 400/= रूप उधार दिये गए। इन कर्जो पर क्रमश पूर्वोक्त मास में 1 पक्ष या $\frac{1}{2}$ महीने अधिक बीत गए। अर्थात् इन कर्जो पर क्रमशः $\frac{9}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{21}{2}$, $\frac{17}{2}$ महीने बीते। तो इनका विवरण-पत्र कैसे तैयार होगा।

विवरण - पत्र

1	2	3	4	5	6	7	8	9
प्र.का.	प्र.ध.	प्र.फ.	प.का.	मू.ध.	कुल ब्याज	1 महीने का ब्याज	ब्याज के कुल महीने	कुल महीने का 100/- का ब्याज
1	100/=	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{2}$	100/=	$\frac{5}{2}\times\frac{9}{2} = 11\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}\times 1 = 2\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}\times\frac{9}{2} = 11\frac{1}{4}$
1	100/=	$\frac{7}{2}$	$\frac{13}{2}$	200/=	$\frac{7}{2}\times\frac{13}{2}\times 2 = 29\frac{1}{4}$	$\frac{7}{2}\times 2 = 7$	$\frac{13}{2}$	$\frac{7}{2}\times\frac{13}{2} = 22\frac{3}{4}$
1	100/=	$\frac{9}{2}$	$\frac{21}{2}$	300/=	$\frac{9}{2}\times\frac{21}{2}\times 3 = 141\frac{1}{4}$	$\frac{9}{2}\times 3 = 13\frac{1}{2}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{9}{2}\times\frac{21}{2} = 47\frac{1}{4}$
1	100/=	$\frac{11}{2}$	$\frac{17}{2}$	400/=	$\frac{11}{2}\times\frac{17}{2}\times 4 = 187$	$\frac{11}{2}\times 4 = 22$	$\frac{17}{2}$	$\frac{11}{2}\times\frac{17}{2} = 47\frac{3}{4}$

नानावर्णसुवर्णस्यैकावर्तिते वर्णपरिज्ञानाय सूत्रम्।

वर्णान् पृथक् स्वहेम्ना गुणयित्वा तद्युतिं सुवर्णानाम्।
योगेन भजेत् तस्मादाप्तो वर्णः समावर्ते[२]।। ३६।।

---

१. तुल. पाटी-गणित उदा. 59, ग.ति.पृ. 87

२. तुल. हेमगुणवर्णयोगे हेमैक्यहृते भवेद् वर्णः पाटी-गणित सू. 52, ग.सा.सं. 6.169

सुक्षेमा अनुवाद-सोने के अलग-2 वर्णों को सोने की अपनी-2 मात्रा से गुणित करके उनके योग को सोने की मात्रा के योग से विभक्त करने पर सोने का वर्ण (fineness) ज्ञात होता है।

द्वादश दश चैकादश वर्णा नव पञ्च षोडश सुवर्णाः।
कनकस्य समावर्ते जायन्ते वर्णकाः केऽस्मिन्[१]।। ६३।।

न्यासः $\frac{12}{9}$ $\frac{10}{5}$ $\frac{11}{16}$ लब्धमावर्ते वर्णाः $11\frac{2}{15}$

सुक्षेमा अनुवाद-12, 10 तथा 11 वर्ण वाले क्रमशः 9, 5 तथा 16 माष के सुवर्ण को समावर्त अर्थात् मिला देने पर निर्मित सुवर्ण का क्या वर्ण होगा। अथवा उसकी शुद्धता कितने वर्ण (carat) की होगी।

अनुशीलन-श्लोक के नियमानुसार-

$$\frac{12 \times 9 + 10 \times 5 + 11 \times 16}{9 + 5 + 16} = \frac{334}{30} = 11\frac{4}{30} = 11 \rightarrow \frac{2}{15}$$ सुवर्ण का वर्ण

सबसे सुन्दर चमकदार वर्ण वाला 'कल्याण सुवर्ण' 16 वर्ण (24 कैरेट) का माना जाता है। अब यदि कोई सुवर्ण 16 वर्ण से किसी कम संख्या (n) वर्ण वाला है तो उसमें $\frac{16-n}{16}$ अन्य धातु की मिलावट मानी जावेगी। अतः वह $\frac{n}{16}$ विशुद्ध वर्ण वाला होगा। इस प्रकार किसी भी सोने में विशुद्ध सुवर्ण $\Rightarrow \frac{\text{वजन} \times \text{वर्ण}}{16}$ होता है। इस दृष्टि से प्रस्तुत उदाहरण में विविध वजन तथा वर्ण वाले सुवर्णखण्डों में विशुद्ध सुवर्ण इस प्रकार होगा-

$$\frac{12 \times 9}{16} = 6.75, \quad \frac{10 \times 5}{16} = 3.125, \quad \frac{11 \times 16}{16} = 11$$

तीनों खण्डों में कुल विशुद्ध सुवर्ण $\Rightarrow$ 20.875 माष (I)

उपरिलिखित उदाहरण में कुल 30 माष के सुवर्णखण्ड को $\frac{334}{30}$ अथवा 11.13....वर्ण का प्राप्त किया गया है। अतः इस नियमानुसार ऐसे सुवर्णखण्ड में विशुद्ध सुवर्ण की मात्रा-

$$\frac{30 \times 11.13....}{16} = 20.875$$ माष (II)

I तथा II से समान सुवर्ण की मात्रा प्राप्त है। अतः स्पष्टतः दोनों समीकरण परस्पर समतुल्य हैं।

---

१. पाटी-गणित उदा. 61

द्वितीयोदाहरणम्

सार्धैकादशदशकार्धाष्टमवर्णाः क्व वर्णके योगात्।
अर्धषडंशार्धान्वित-पञ्च-चतुः-सप्त-माषाः स्युः[१]।। ६४।।

	11	10	7
न्यासः	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
	5	4	7
	1	1	1
	2	6	2

लब्धमावर्ते वर्णाः $9\frac{40}{103}$।।

सुक्षेमा अनुवाद-$11\frac{1}{2} = \frac{23}{2}, \frac{10}{1}$, तथा $7\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$ वर्ण वाले क्रमशः अर्धयुक्त 5 अर्थात् $\frac{11}{2}$, छठे अंश से युक्त 4 अर्थात् $\frac{25}{6}$ तथा अर्धयुक्त 7 अर्थात् $\frac{15}{2}$ माष के सुवर्ण को मिलाने से निर्मित सुवर्ण का वर्ण क्या होगा।

अनुशीलन-पूर्वोक्त नियमानुसार-

$$\frac{23}{2} \times \frac{11}{2} + \frac{10}{1} \times \frac{25}{6} + \frac{15}{2} \times \frac{15}{2} = \frac{253}{4} + \frac{250}{6} + \frac{225}{4}$$

$$= \frac{1518 + 1000 + 1350}{24} = \frac{3868}{24}$$

$$\frac{11}{2} + \frac{25}{6} + \frac{15}{2} = \frac{33 + 25 + 45}{6} = \frac{103}{6}$$

$$\frac{3868}{24} \times \frac{6}{103} = \frac{23208}{2472} = \frac{23208 \div 24}{2472 \div 24} = \frac{967}{103} = 9\frac{40}{103}$$ सुवर्ण का वर्ण

पक्वसुवर्णस्य वर्णसुवर्णयोः परिज्ञानाय सूत्रम्

वर्णसुवर्णवधैक्यं विपक्वकनकेन भाजितं वर्णः।
वर्णेन हृतं तु भवेत् तदेव परिपक्ववह्निभवम्[२]।। ३७।।

सुक्षेमा अनुवाद-सुवर्ण के वर्ण को उनकी अलग-2 मात्रा से गुणित करके उनके योग को पक्व सुवर्ण की मात्रा से विभाजित करने से वर्ण का परिज्ञान होगा। उस योग को सुवर्ण के वर्ण से विभाजित करने पर परिपक्व वह्नि में निर्मित सोने की मात्रा जानी जावेगी।

अनुशीलन-इससे पूर्व श्लोक में सोने की मात्रा के योग से विभक्त करने पर सोने के वर्ण का परिज्ञान बताया है। सोने को आग में गलाने पर उसकी मात्रा

---

१. तुल. पाटी-गणित उदा. 62, ग.सा.सं. 6.170

२. तुल. पाटी-गणित सू. 53, ग.सा.सं. 6.175, म.सि. 15.40

उतनी नहीं रहती। अपितु उसके मल के नष्ट होने से कम हो जाती है। इससे सोने का वर्ण अधिक अच्छा तथा मूल्य बढ़ जाता है। इस प्रकार ज्यो-ज्यों मात्रा कम होती है, त्यों-त्यों वर्ण (fineness) बढ़ती है। अतः इसे बढ़े हुए वर्ण को जानने के लिये उस घटी हुई मात्रा से भाग देना चाहिये। अथवा घटी हुई मात्रा को जानने के लिये बढ़े हुए वर्ण से भाग देना चाहिये। यही इस श्लोक में कहा है। इन नियमों से हमें ये सूत्र प्राप्त होते हैं–

$$\text{वर्ण} = \frac{\text{वर्ण}_1 \times \text{मात्रा}_1 + \text{वर्ण}_2 \times \text{मात्रा}_2 + \ldots\text{वर्ण}_n \times \text{मात्रा}_n}{\text{मात्रा}}$$

$$\text{मात्रा} = \frac{\text{वर्ण}_1 \times \text{मात्रा}_1 + \text{वर्ण}_2 \times \text{मात्रा}_2 + \ldots\text{वर्ण}_n \times \text{मात्रा}_n}{\text{वर्ण}}$$

उदाहरणम्

पञ्चाष्टषट्सुवर्णा द्वादशनवकार्धपञ्चदशवर्णाः।
पक्वाः षोडश दृष्टास्तद् वर्णक उच्यतामाशु[१]।। ६५।।

न्यासः $\frac{12}{1}$ $\frac{9}{1}$ $\frac{29}{2}$ पक्वे हेम 16। लब्धं वर्णाः $13\frac{11}{16}$

5 8 6

सुक्षेमा अनुवाद-12, 9 तथा $14\frac{1}{2} = \frac{29}{2}$ वर्ण वाले क्रमशः 5, 8 तथा 6 माष के सुवर्ण मिलकर पकने पर 16 माष के देखे गए। वे कितने वर्ण के होंगे।

अनुशीलन-सोने की कुल मात्रा 5 + 8 + 6 = 19 है। पर आग पर तपाने से वह 16 माषा रह गया है। इससे उसका वर्ण बढ़ गया है। अतः पूर्वोक्त प्रक्रिया का अनुसरण करते हुए, 19 से भाग न देकर 16 से भाग देना होगा। इससे उसका बढ़ा वर्ण प्राप्त होगा–

$$\frac{12 \times 5 + 9 \times 8 + \frac{29}{2} \times 6}{16} = \frac{60 + 72 + 87}{16}$$

$= \frac{219}{16} = 13 + \frac{11}{16}$ सुवर्ण का वर्ण

द्वितीयोदाहरणम्

त्रिचतुः सप्तवर्णा द्वादशदशकाष्टवर्णका दृष्टाः।
एकादश च विपक्वा वर्णा वद पक्ववह्निभवम्[२]।। ६६।।

---

१. तुल. पाटी-गणित उदा. 63

२. तुल. पाटी-गणित उदा. 64

न्यास: 12 10 8

3 4 7 पक्वसुवर्णवर्णा: 11, लब्धं सुवर्णा: 12

सुक्षेमा अनुवाद-12, 10 तथा 8 वर्ण वाले क्रमश: 3, 4 तथा 7 माष के सुवर्ण वह्नि में तपने पर 11 वर्ण के हो जाते हैं। उनकी अब कितनी मात्रा रह गई, बताओ।

अनुशीलन-पूर्वोक्त विवरण के अनुसार सोने का वर्ण जितना बढ़ता है, मात्रा उतनी ही घटती है। अत: यहाँ वर्ण से भाग देने पर मात्रा ज्ञात होगी। अत:-

$$\frac{12 \times 3 + 10 \times 4 + 8 \times 7}{11} = \frac{36 + 40 + 56}{11} = \frac{132}{11} = 12$$

प्रक्षेपक-करण-सूत्रम्

स्वयुतिहृतप्रक्षेपान् फलेन हन्यात् पृथक् फलावाप्त्यै।।

सुक्षेमा अनुवाद-प्रक्षेप[१] अर्थात् खेत में छितराए गए बीज या मूलधन के योग से 'प्रक्षेप' या मूलधन की अलग-2 मात्रा को विभक्त करके सम्पूर्ण फल या मिश्रधन से गुणित करने पर अलग-2 फल या उपज ज्ञात होती है।

द्वौ त्रय: पञ्च चत्वार: प्रस्था बीजस्य वापिता:।
शतद्वयं दशोपेतं तत्र किं स्यात् पृथक् फलम्[२]।। ६७।।

न्यास: 2। 3। 4। 5 फलम् 210 लब्धं पृथक्-पृथक् फलम् 30। 45। 60। 75।।

सुक्षेमा अनुवाद-अलग-अलग खेतों में क्रमश: 2, 3, 4 तथा 5 प्रस्थ बीज डाले गए। उन खेतों में कुल मिलाकर 210 प्रस्थ धान्य तैयार हुए। अलग-अलग खेतों में कितनी-कितनी उपज हुई।।

अनुशीलन-यहाँ खेती से सम्बन्धित प्रश्न दिये गए हैं। इनकी विधि से लाभ, साझा (share) के वाणिज्य विषयक प्रश्नों को भी हल किया जा सकता है। इन सबमें समानुपात को खोजा गया है। श्लोक के नियमानुसार प्रश्न का हल-

---

१. प्रक्षिप्यते उप्यते सन्तन्यते इति प्रक्षेपो बीजं, तत उत्पत्ति: फलम्। - पाटी गणित सूत्र 59 पर टीका

तुल. ब्रा.स्फु.सि. 12.16, सि.शे. 13.19, लीलावती मिश्रक व्यवहार श्लोक 13

२. तुल. पाटी-गणित उदा. 71

प्रक्षेप या मूलधन $\Rightarrow$ 2। 3 । 4। 5

इनका योग = 14

मूलधन के योग से एकक मात्रा का विभाग $\frac{2}{14} = \frac{1}{7}$,

$\frac{1}{7} \times 210 = \frac{210}{7} = 30$ प्रथम खेत की उपज

इसके समानुपात से इस प्रकार हल प्राप्त होते हैं –

$14 : 210 : : 2 : x$ अतः $x = \frac{210 \times 2}{14} = \frac{420}{14} = 30$

$14 : 210 : : 3 : x$ $x = \frac{210 \times 3}{14} = \frac{630}{14} = 45$

$14 : 210 : : 4 : x$ $x = \frac{210 \times 4}{14} = \frac{840}{14} = 60$

$14 : 210 : : 5 : x$ $= \frac{210 \times 5}{14} = \frac{1050}{14} = 75$

द्वितीयोदाहरणम्

शतस्य लब्धवानेकः पञ्चशत्यास्तथापरः।
फलमन्यः सहस्रस्य सहस्रे षट्शताधिके।। ६८।।
सर्वग्रामफले विद्वन् तत्रोत्पन्नं शतद्वयम्।
ततः किं कस्य भागे स्याद् गणयित्वा निगद्यताम्।। ६९।।

न्यासः 100। 500। 1000। सर्वग्रामफलम् 1600। सर्वोत्पत्तिः 200। लब्धं पृथक्-पृथक् फलम् $\frac{25}{2}$ । $62\frac{1}{2}$ । 125

इति प्रक्षेपकप्रकरणम्

सुक्षेमा अनुवाद-हे विद्वन्! सम्पर्ण ग्राम के कुल 1600 परिमाण के खेत में एक ने 100, दूसरे ने 500 तथा तीसरे ने 1000 परिमाण वाले खेत से उपज प्राप्त की। कुल उपज 200 प्रस्थ हुई। तो किसने कितने प्रस्थ अनाज प्राप्त किया।

अनुशीलन-यह भी समानुपात का प्रश्न है। अतः यह मान लिया गया है कि सभी खेत समान रूप से उपजाऊ थे। श्लोक के नियमानुसार–

$\frac{100}{1600} \times 200 = \frac{1}{16} \times 200 = \frac{200}{16} = 12\frac{1}{2}$

$\frac{500}{1600} \times 200 = \frac{5}{16} \times 200 = \frac{1000}{16} = 62\frac{1}{2}$

$\frac{1000}{1600} \times 200 = \frac{5}{8} \times 200 = \frac{1000}{8} = 125$

समानुपात के नियमानुसार भी यही हल प्राप्त है–

$1600 : 200 :: 100\ x$ अतः $x = \frac{200 \times 100}{1600} = \frac{20000}{1600} = 12\frac{1}{2}$

$1600 : 200 :: 500\ x \qquad x = \frac{200 \times 500}{1600} = \frac{100000}{1600} = 62\frac{1}{2}$

$1600 : 200 :: 1000\ x \qquad x = \frac{200 \times 1000}{1600} = \frac{200000}{1600} = 125$

समक्रयविषमक्रययोः सूत्रम्

मूल्ये पण्येन हृते पृथगंशहते विधि पूर्वः[१]।। ३८।।

सुक्षेमा अनुवाद-मूल्य को अपने-अपने अंश या भाग से गुणा करके पण्य से विभाजित करके पूर्वोक्त प्रक्षेपक विधि करने पर समक्रय तथा विषम क्रय की मात्राएँ प्राप्त होती हैं।

उदाहरणम्

रूपेणार्धपलं हिंगोः पिप्पल्यास्तु पलद्वयम्।
शुण्ठ्याः पलानि सप्तैतान् देहि रूपेण में समान्[२]।। ७०।।

	1	1	1
न्यासः	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{7}{1}$
	1	1	1

मिश्रधनम् 1। लब्धं हिंगुमूल्यम् $\frac{28}{37}$

शुण्ठीमूल्यम् $\frac{7}{37}$ पिप्पलीमूल्यम् $\frac{2}{37}$ हिंग्वादीनां मूल्यसदृशं तौल्यम्। कर्षः 1। माषाः 8। गुञ्जा 1। गुञ्जा भागाः $\frac{3}{37}$।।

सुक्षेमा अनुवाद-1 रूप से $\frac{1}{2}$ पल हींग अथवा 1 रूप से 2 पल पीपल, अथवा 1 रूप से 7 पल सोंठ प्राप्त होते हैं। तो मुझे 1 रूप से समान मात्राओं में ये तीनों वस्तुएँ प्रदान करो।

---

१. तुल. पाटी-गणित सू. 59, सि.शे. 13.19, ग.सा.सं. 6.87-89, ग.कौ.पृ. 57

२. तुल. पाटी-गणित उदा. 75, ग.कौ.पृ. 57

अनुशीलन-यहाँ मिश्रधन 1 तथा समान मूल्य से मात्राओं का अनुपात इस प्रकार है–

मूल्य			पण्य या मात्रा
रूप	$\Rightarrow 1$	:	$\frac{1}{2}$ पल
	$\Rightarrow 1$	:	2
	$\Rightarrow 1$	:	7

अब श्लोक के नियमानुसार मूल्य को पण्य से विभाजित करने पर $\Rightarrow$

$1 \times \frac{2}{1} = 2, \; 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \; 1 \times \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$

इस प्रकार समान मात्राओं का मूल्य से अनुपात–

मात्रा			मूल्य
पल	$\Rightarrow 1$	:	$2 \Leftarrow$ रूप
	$\Rightarrow 1$	:	$\frac{1}{2} \Leftarrow$
	$\Rightarrow 1$	:	$\frac{1}{7} \Leftarrow$

मूल्य अथवा फल का योग–

$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} = \frac{37}{14}$

श्लोक के नियमानुसार प्रक्षेप या मूल्य की अलग मात्राओं को इनके फल अथवा योग से विभक्त करके मिश्रधन 1 से गुणित करने पर–

$2 \times \frac{14}{37} \times 1 = \frac{28}{37}$ रूप की $\frac{14}{37}$ पल हींग

$\frac{1}{2} \times \frac{14}{37} \times 1 = \frac{7}{37}$ रूप की $\frac{14}{37}$ पल पीपल

$\frac{1}{7} \times \frac{14}{37} \times 1 = \frac{2}{37}$ रूप की $\frac{14}{37}$ पल सोंठ

इस प्रकार $\frac{28}{37} + \frac{7}{37} + \frac{2}{37} = 1$ रूप से प्रत्येक तीनों की $\frac{14}{37}$ पल समान मात्राएँ प्राप्त होती हैं।

समान मात्रा ज्ञात होने पर इनका मूल्य समानुपात से भी ज्ञात होता है–

$\frac{1}{2} : 1 :: \frac{14}{37} : x$ अतः $x = \frac{14 \times 2}{37} = \frac{28}{37}$ हींग का मूल्य

$2 : 1 :: \frac{14}{37} : x$ ...$x = \frac{14 \times 1}{37 \times 2} = \frac{7}{37}$ पीपल का मूल्य

$7 : 1 : : \frac{14}{37} : x \ ...x = \frac{14 \times 1}{37 \times 7} = \frac{2}{37}$ सोंठ का मूल्य

$\overline{1}$ रूप कुल मूल्य

स्पष्टतः यहाँ श्लोक के अनुसार पूर्वोक्त संक्रिया की गई है।

उपर्युक्त सम्पूर्ण नियम बीजगणितीय सामान्य समीकरण से आसानी से सिद्ध है–

यदि x = एक रूप से प्राप्त होने वाली तीनों वस्तुओं की बराबर अज्ञात मात्रा–

मूल्य चुकाया गया $\Rightarrow 1$ रूप

यदि $x \times \frac{2}{1} + x \times \frac{1}{2} + x \times \frac{1}{7} = 1$ रूप

$\Rightarrow x\left(\frac{2}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right) = \frac{37}{14} x = 1$ रूप

प्रश्नानुसार $\Rightarrow \frac{37}{14} x = 1$ रूप

$\Rightarrow x = \frac{14 \times 1}{37} = \frac{14}{37}$ पल

इस प्रकार $\frac{14}{37}$ पल ही वह समान मात्रा है जिसके अलग-अलग मूल्यों का योग कुल 1 रूप प्राप्त होता है।

$\frac{14}{37} \times 4 = \frac{56}{37} = 1 \frac{19}{37}$ कर्ष

$\frac{19}{37} \times 16 = \frac{304}{37} = 8 \frac{8}{37}$ माष

$\frac{8}{37} \times 5 = \frac{40}{37} = 1 \frac{3}{37}$ गुंजा

अतः $\frac{3}{37}$ गुंजा भाग

विषमक्रयोदाहरणम्

मुद्गाना कुडवाः सप्त लभ्यन्ते नवभिः पणैः।
पणेन कुडवस्यार्धं तण्डुलानामवाप्यते।। ७१।।
ततः पणत्रयं सार्धं गृहीत्वाशु वणिङ् मम।
तण्डुलानां प्रयच्छाशु मुद्गाना चार्धसंगुणम्[१]।। ७२।।

१. तुल. पाटी-गणित उदा. 73-74

न्यासः 9   1

$\frac{7}{1}$ $\frac{1}{2}$ मिश्रधनम् $\frac{7}{2}$ लब्धं मुद्गानां मूल्यं पणः 0

1   2

काकिण्यः 3। वराटकाः 8। वराटकभागाश्च $\frac{4}{37}$। तण्डुलानां पणौ 2।

काकिण्यौ 2। वराटकाः 11। वराटकभागाः $\frac{33}{37}$। मुद्गानां कुडवः 0।

कुडवभागाः $\frac{49}{74}$। तण्डुलानां कुडवः 1। कुडवभागाः $\frac{12}{37}$ । इति मिश्रव्यवहारः।

सुक्षेमा अनुवाद-9 पण से 7 कुडव मूँग तथा 1 पण से $\frac{1}{2}$ कुडव चावल प्राप्त होता है। अतः हे वणिक्! मेरे $3\frac{1}{2}$ अर्थात् $\frac{7}{2}$ पण लेकर मूँग का $\frac{1}{2}$ तथा तण्डुल 1 भाग शीघ्र प्रदान करो।

अनुशीलन-यहाँ प्रश्नानुसार पण्य अथवा मात्रा 7 तथा $\frac{1}{2}$ कुडव का क्रमशः मूल्य 9 तथा 1 पण है। इनमें स्वभाग अर्थात् वाञ्छित मात्रा क्रमशः $\frac{1}{2}$ भाग तथा 1 भाग है। इनका मिश्रधन अर्थात् इन दोनों मात्राओं के लिये दिया गया कुल मूल्य $\frac{7}{2}$ पण है।

यहाँ श्लोक के नियमानुसार मूल्य का स्वभाग से गुणा तथा पण्य से भाग करने पर-

$9 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{7}$ = $\frac{9}{14}$ पण से $\frac{1}{2}$ कुडव मूँग

$1 \times 1 \times \frac{2}{1}$ = 2 पण से 1 कुडव चावल

इनका योग ⇒ $\frac{9}{14} + \frac{2}{1} = \frac{37}{14}$

अथवा-

7 कुडव मूंग का मूल्य   9 पण

1 कुडव का मूल्य $\frac{9}{7}$

$\frac{1}{2}$ कुडव का मूल्य $\frac{9}{7\times2} = \frac{9}{14}$ पण

अब पूर्वोक्त प्रक्षेपक विधि से पूर्वोक्त मूल्य की अलग-अलग मात्राओं को इनके योग से विभक्त करके मिश्रधन से गुणित करने पर-

$\frac{9}{14} \times \frac{14}{37} \times \frac{7}{2}$ = $\frac{63}{74}$ पण से $\frac{1}{2}$ भाग मूँग

$2 \times \frac{14}{37} \times \frac{7}{2}$ = $\frac{98}{37}$ पण से 1 भाग तण्डुल

यह कुल $\frac{7}{2}$ पण से प्राप्त होने वाले अलग-अलग भागों का अलग-अलग मूल्य है, क्योंकि-

$\frac{63}{74} + \frac{98}{37} = \frac{259}{74} = \frac{7}{2}$

$\frac{63}{74}$ में पूर्णांक पण 0 है। $\frac{63}{74} \times 4 = \frac{252}{74} = 3\frac{30}{74}$ काकिणी

$\frac{30}{74} \times 20 = \frac{600}{74} = 8\frac{8}{74}$ वराटक तथा इसके भाग $\frac{4}{37}$ सिद्ध है।

$\frac{98}{37} = 2\frac{24}{37}$ पण, $\frac{24}{37} \times 4 = \frac{96}{37} = 2\frac{22}{37}$ काकिणी, $\frac{22}{37} \times 20 = \frac{440}{37} = 11\frac{33}{37}$ वराटक इस प्रकार $\frac{33}{37}$ वराटक भाग सिद्ध होते हैं।

अब अपने-अपने भाग या अंश को पूर्वोक्त फल या योग से विभक्त करके कुल मूल्य से गुणित करने पर–

$\frac{1}{2} \times \frac{14}{37} \times \frac{7}{2} = \frac{49}{74}$ कुडव, $\frac{1}{2}$ भाग मूँग का परिमाण

$1 \times \frac{14}{37} \times \frac{7}{2} = \frac{49}{37}$ अथवा $1\frac{12}{37}$,1 भाग तण्डुल का परिमाण

इस प्रकार स्पष्टतः $\frac{49}{37}$ कुडव तण्डुल का मूल्य $\frac{98}{37}$ पण है तथा इस परिमाण के $\frac{1}{2}$ भाग $\frac{49}{74}$ कुडव का मूल्य $\frac{63}{74}$ है। इन दोनों मूल्यों का योग $\frac{7}{2}$ है। अतः इस मूल्य से उपर्युक्त परिमाण के तण्डुल तथा मुद्ग प्राप्त होंगे।

परिमाण ज्ञात होने पर इनके मूल्य समानुपात से भी ज्ञात हो सकते हैं–

$7 : 9 :: \frac{49}{74} : x \Rightarrow x = 9 \times \frac{49}{74} \times \frac{1}{7} = \frac{441}{518} = \frac{63}{74}$ पण

तथा–

$\frac{1}{2} : 1 :: \frac{49}{37} : x \Rightarrow x = 1 \times \frac{49}{37} \times \frac{2}{1} = \frac{98}{37}$ पण

यह सम्पूर्ण विधि बीजगणित के सामान्य नियम के अनुसार स्वतः सिद्ध है। जैसे–

x = कुडव में तण्डुल की वाञ्छित अज्ञात मात्रा

$\frac{1}{2}x$ = कुडव में मूँग की वाञ्छित अज्ञात मात्रा

प्रश्नानुसार $\Rightarrow \frac{7}{9}$ कुडव मूँग का मूल्य $\Rightarrow 1$ पण

$\Rightarrow \frac{1}{2}$ कुडव तण्डुल का मूल्य $\Rightarrow 1$ पण

कुल मूल्य चुकाया गया $\Rightarrow \frac{7}{2}$ पण

अतः अज्ञात मात्रा के तण्डुल का मूल्य $\Rightarrow x \times \frac{2}{1}$

अज्ञात मात्रा के मूँग का मूल्य $\Rightarrow \frac{1}{2}x \times \frac{9}{7}$

अज्ञात मात्रा का कुल मूल्य $x\left(\frac{2}{1} + \frac{9}{14}\right) = \frac{37}{14}x$ पण

प्रश्नानुसार कुल मूल्य $\frac{7}{2}$ है।

अतः $\frac{37}{14}x = \frac{7}{2}$ पण,

$\therefore \quad x = \frac{14}{37} \times \frac{7}{2} = \frac{98}{74} = \frac{49}{37}$ कुडव तण्डुल परिमाण

तथा $\frac{1}{2}x = \frac{49}{37} \times \frac{1}{2} = \frac{49}{74}$ कुडव मुद्ग परिमाण

अब पूर्वोक्तानुसार $\frac{1}{2}$ कुडव तण्डुल का मूल्य 1 पण

अतः $\Rightarrow 1$,, ,, ,, ,, $1 \times \frac{2}{1}$ पण

$\therefore \frac{49}{37}$,, ,, ,, ,, $\frac{49}{37} \times 2 = \frac{98}{37}$ तण्डुल मूल्य

इसी प्रकार–

$\frac{7}{9}$ कुडव मूँग का मूल्य 1 पण

1 कुडव मूँग का मूल्य $1 \times \frac{9}{7} = \frac{9}{7}$ पण

$\frac{49}{74}$,, ,, ,, ,, $\frac{49}{74} \times \frac{9}{7} = \frac{63}{74}$ पण मुद्ग मूल्य

प्रश्नानुसार $\frac{98}{37} + \frac{63}{74} = \frac{7}{2}$ सिद्ध है।

श्रेढ़ीव्यवहारे सूत्रम्

व्येकपदोत्तरघाते सादावन्त्यं धनं तदादियुतम्।
द्विविभक्तं मध्यधनं गच्छगुणं जायते गणितम्[१]।। ३९।।

सुक्षेमा अनुवाद-1 संख्या से न्यून किये गए पद या गच्छ के साथ उत्तर या चय को गुणित करके 'सादि' अर्थात् आदि धन से युक्त होने पर अन्त्यधन प्राप्त होता है। उस अन्त्यधन के साथ आदि धन को संयुक्त करके 2 संख्या से विभक्त करने पर मध्यधन होता है। इस मध्यधन को गच्छ या पद से गुणा करने पर सर्वधन प्राप्त होता है। इसे गणित कहा जाता है।

अनुशीलन-इस प्रकरण में क्रमिक संख्याओं के योग से प्राप्त अनेक उपलब्धियों का निरूपण किया गया है। संस्कृत में इन्हें 'श्रेणी' कहा जाता है। गणित शास्त्र में इसका प्राकृत रूप 'श्रेढ़ी' शब्द लोकप्रिय रहा है।

इसके लिये यहाँ अनेक पारिभाषिक शब्दों का प्रयोग किया गया है, जिनका क्रमिक निरूपण इस प्रकार है–

पारिभाषिक शब्द	**हिन्दी अर्थ**	**इंग्लिश अर्थ**	**इंग्लिश प्रतीक**
आदि-धन,	पहला धन अथवा संख्या,	first term	a
अन्त्य-धन,	अन्तिम धन या संख्या,	last term	l

१. व्येकपदार्धघ्नचयः सादिः पदसंगुणो भवेद् गणितम्।। - पाटी-गणित सूत्र 85, पृ. 110 तुल. आर्यभटीय गणितपाद 1.19, ब्रा.स्फु.सि. 12.17 ग.सा.सं. 2.61 तथा 6.290, ग.कौ. 1.105

मध्य-धन,	मध्य का धन या संख्या,	middle term	m
सर्वधन या गणित,	सम्पूर्ण धन या संख्या,	sum of terms	s
उत्तर या चय या प्रचय,	प्रत्येक संख्या के साथ क्रमशः जोड़ी जाने वाली संख्या,	common difference	d
पद या गच्छ,	संख्याओं की गणना,	number of terms	n

प्रस्तुत श्लोक में अन्त्यधन, मध्यधन तथा सर्वधन प्राप्त करने के सूत्र बताए गए हैं। इनके लिये अन्य पारिभाषिक शब्दों का भी उपयोग है। अन्त्यधन आदि के सूत्र को हम इस प्रकार प्रकट कर सकते हैं–

अन्त्यधन = उत्तर (पद − 1) + आदिधन

अथवा $\ell = d(n-1) + a$

मध्यधन = $\frac{\text{आदिधन + अन्त्यधन}}{2}$

अथवा $m = \frac{a+\ell}{2}$

सर्वधन = $\frac{\text{पद (आदिधन + अन्त्यधन)}}{2}$ अथवा पद × मध्यधन

अथवा $s = \frac{n(a+\ell)}{2}$ अथवा $s = n \times m$

उदाहरणम्

प्रथमेऽह्नि हरीतक्या दीयेताश्वस्य विंशतिर्यस्य।
पञ्चकचयेन दत्ताः कति ता दिनसप्तकेन स्युः।। ७३।।

न्यासः।। आदिः 20। उत्तरः 5। गच्छः 7। लब्धमन्त्यदिने हरीतक्यः 50। मध्ये 35। सर्वहरीतक्यः 245।

सुक्षेमा अनुवाद-प्रथम दिन घोड़े को 20 हरड़ दी गई। उसके पश्चात् अगले 7 दिनों तक प्रतिदिन क्रमशः 5-5 हरड़ बढ़ाकर दी गई। तो सातवें दिन तथा बीच वाले दिन कितनी दी गईं। इस प्रकार 7 दिनों में कुल कितनी हरड़ प्रदान की गई।

अनुशीलन-यहाँ उपर्युक्त क्रम से सातवें दिन प्राप्त की गई हरड़ 'अन्त्य-धन' कही जावेगी।

यहाँ प्रथम दिन दी गई 20 हरड़ आदिधन (a) है, प्रतिदिन अतिरिक्त दी जाने वाली संख्या उत्तर या चय (d) 5 है, दिनों की कुल संख्या पद या गच्छ (n) 7 है। इस स्थिति में उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग करने पर–

$5(7-1) + 20 = 50$ अन्त्यधन

यह अन्त्यधन का सर्वथा समुचित सूत्र है। क्योंकि वह घोड़ा निम्न क्रम से हरड़ प्राप्त करता है–

प्रथम दिन,	**द्वितीय दिन,**	**तृतीय दिन,**	**चतुर्थ दिन,**	**पञ्चम दिन,**	**षष्ठ दिन,**	**सप्तम दिन**
a,	(a + d),	(a + 2d),	(a + 3d),	(a + 4d),	(a + 5d),	(a + 6d)
20,	20+5=25,	20+10=30,	20+15=35,	20+20=40,	20+25=45,	20+30=50

तालिका से स्पष्ट है कि प्रत्येक दिन तथा अन्तिम 7वें दिन भी nवें दिन से 1 कम से गुणित उत्तर (d) के साथ आदिधन (a) संयुक्त है। अतः प्रस्तुत सूत्र में यही कहा गया है।

प्रस्तुत उदाहरण में मध्य दिन चतुर्थ दिन है। अन्त्यधन के उपाय से मध्यधन जानने के प्रस्तुत सूत्र अनुसार–

$$\frac{20 + 50}{2} = 35 \text{ मध्यधन}$$

इसी प्रकार सातों दिन में कुल हरड़ सर्वधन जानने के लिये उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग करने पर–

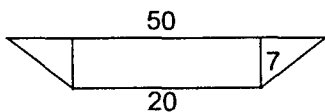
$$\frac{7(20 + 50)}{2} = 245 \text{ अथवा } 7 \times 35 = 245 \text{ सर्वधन}$$

पाटी-गणित में सर्वधन के सूत्र में अन्त्यधन का सम्पूर्ण सूत्र सम्मिलित करते हुए सूत्र भी प्रदान किया है।[१] उससे अन्ततः यही पूर्वोक्त सूत्र प्राप्त होता है–

$$\text{सर्वधन} = \frac{n(a + \ell)}{2}$$

पाटी-गणित में इस स्थिति को ज्यामितीय समलम्ब चतुर्भुज (trapazium) का रूप देते हुए एक ऐसे 'शराव' नामक पात्र से तुलना की है, जिसकी आधार भुजा छोटी तथा सम्मुख भुजा बड़ी हो। प्रस्तुत उदाहरण में आदिधन 20, अन्त्यधन 50 तथा दिनों की संख्या 7 मान कर यह चित्र प्रस्तुत करते हैं–

---

१. व्येकपदार्धघ्नचयः सादिः पदसंगुणो भवेद् गणितम्।। - पाटी-गणित सूत्र 85, पृ. 110 तुल. आर्यभटीय गणितपाद 1.19, ब्रा.स्फु.सि. 12.17 ग.सा.सं. 2.61 तथा 6.290, ग.कौ. 1.105

नापियाँ मिलीमीटर में हैं।

यहाँ दिनों की संख्या या गच्छ को शीर्षलम्ब बताया है[१]। यह समलम्ब चतुर्भुज है। अतः इसके लिये पाटी-गणित का यह नियम प्राप्त करते हैं–

श्रेढ़ीक्षेत्रे तु फलं भूमुखयोगार्धलम्बहतिः

अर्थात् इस आकार का श्रेढ़ी फल आधार भुजा तथा इसकी सम्मुख भुजा के योग के आधे का शीर्षलम्ब से गुणन द्वारा प्राप्त होता है। स्पष्टतः यह समलम्ब चतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र है तथा यह पूर्वोक्त सर्वधन के सूत्र के ठीक समतुल्य बैठता है।

त्रिशतिका सूत्र 42 पृ. 84 में भी अन्य शब्दों में यही सूत्र प्रस्तुत किया है।

इस चतुर्भुज में 20×7 का एक आयत तथा $\frac{15}{2} \times 7$ के दो त्रिभुज हैं। इन दोनों के सूत्रों को मिलाने पर हम पुनः वही $7(15 + 20) = 245$ क्षेत्रफल प्राप्त करते हैं। इस प्रकार $15 + 20 = 35$ यह प्रतिदिन के दान का औसत या मध्यधन प्रकट होता है।

निम्नांकित तालिका से भी प्रकट है कि यही प्रतिदिन के दान का औसत है–

समान क्रम	⇒ 20	25	30	35	40	45	50	=	245
विपरीत क्रम	⇒ 50	45	40	35	30	25	20	=	245
योग	⇒ 70	70	70	70	70	70	70	=	490

यहाँ दोनों क्रम से लिखी संख्याओं का योग एक समान 490 होने से प्रकट है कि परिमाण समान है। साथ ही प्रथम $20 + 50 = 70$ स्पष्टतः $a + \ell$ है। आगे भी सभी का योग 70 होने से सिद्ध है कि ये सभी जोड़े $a + \ell$ के समकक्ष हैं। तालिका से यह भी प्रकट है कि सम्पूर्ण दिनों की संख्या या n से गुणित $a + \ell$ श्रेढ़ीफल का दुगुना 490 है। अतः निश्चय ही श्रेढ़ी फल n गुणित $a + \ell$ का $\frac{1}{2}$ होगा। सूत्र में यही प्रकट किया गया है। यह $a + \ell$ का $\frac{1}{2}$ मध्यधन ही है। अतः n गुणित मध्यधन को भी सर्वधन कहा जा सकता है। सूत्र में यही प्रकट किया गया है।

---

१. गच्छसमो लम्बकस्तस्य – पाटी-गणित सूत्र 79, पृ. 107

अन्यदुदाहरणम्

प्रथमदिने सार्धे द्वे रूपार्धचयेन चान्यदिवसेषु।
वित्तं प्रयच्छति धनी केभ्यः किं सैकमासेन।। ७४।।

पूर्वोक्तोदाहृतवन्न्यासः।। आदिः $\frac{5}{2}$। उत्तरः $\frac{1}{2}$ गच्छः 30। लब्धमन्त्यधनम् 17। मध्यधनम् $9\frac{3}{4}$। सर्वधनम् $292\frac{1}{2}$

सुक्षेमा अनुवाद-कोई धनी किसी याचक को प्रथम दिन $2\frac{1}{2}$ अथवा $\frac{5}{2}$ रूप वित्त देकर एक मास तक प्रत्येक अन्य दिन $\frac{1}{2}$ रूप बढ़ाकर प्रदान करता है, तो मास के अन्तिम तथा मध्य दिन वह कितने रूप प्रदान करेगा। साथ ही सम्पूर्ण कुल कितने रूप अथवा सर्वधन दिया जावेगा।

यहाँ उत्तर (d) $\frac{1}{2}$, गच्छ (n) 30 है।

पूर्वोक्त सूत्रानुसार–

$\frac{1}{2}(30-1)+\frac{5}{2}=\frac{29}{2}+\frac{5}{2}=\frac{34}{2}=17$ रूप अन्त्य धन

$\frac{\frac{5}{2}+17}{2}=\frac{39}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{39}{4}=9\frac{3}{4}$ रूप मध्यधन

$30\times\frac{39}{4}=\frac{1170}{4}=292\frac{2}{4}=292\frac{1}{2}$ रूप सर्वधन

आदिज्ञानाय करणसूत्रम्

आदिः पदहृतगणितं निरेकगच्छघ्नचयदलेनोनम्[१]।

पूर्वोक्तोदाहारणे न्यासः।। आदिः 0। उत्तरः 5। गच्छः 6 गणितम् 245। लब्धमादिः 20

पूर्वोक्तोदाहरणस्य द्वितीयस्य न्यासः।। आदिः 0। उत्तरः $\frac{1}{2}$ गच्छः 30। गणितम् $292\frac{1}{2}$। आदिर्लब्धम् $\frac{5}{2}$।।

सुक्षेमा अनुवाद-पद या गच्छ (n) से विभाजित किये गए गणित या सर्वधन (s) में से 1 कम गच्छ से गुणित चय (d) का $\frac{1}{2}$ घटा देने पर आदिधन प्राप्त होता है।

अनुशीलन-इस श्लोक में प्रोक्त आदिधन प्राप्त करने के सूत्र का यह आकार प्राप्त कर सकते हैं–

---

१. तुल. पाटी-गणित सू. 86, ग.सा.सं. 2.74-76, म.सि. 15.48, सि.शे. 13.23 लीलावती श्रेढ़ी व्यवहार श्लोक 4

आदिधन $(a) = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)\,d}{2}$

इस सूत्र को सर्वधन के विस्तृत सूत्र द्वारा प्राप्त किया गया है। ऊपर जो सर्वधन का सूत्र उल्लिखित है, उसमें l के स्थान पर उसका सूत्र लिखने पर सर्वधन का विस्तृत सूत्र तथा उसके आदिधन का यह सूत्र इस प्रकार प्राप्त करते हैं–

सूत्र	**उदाहरण**
सर्वधन[१७] $s = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$	$245 = \frac{7}{2}\{2 \times 20 + (7-1)5\} = \frac{7}{2} \times 70 = \frac{490}{2}$
$\Rightarrow 2s = n\{2a + (n-1)d\}$	$490 = 7\{2 \times 20 + (7-1)5\} = 7 \times 70$
$\Rightarrow \frac{2s}{n} = 2a + (n-1)d$	$\frac{490}{7} = 2 \times 20 + (7-1)5 = 40 + 30 = 70$
$\Rightarrow 2a = \frac{2s}{n} - (n-1)d$	$40 = \frac{490}{7} - (7-1)5 = 70-30$
$\Rightarrow a = \frac{2s}{2n} - \frac{(n-1)d}{2}$	$20 = \frac{490}{14} - \frac{(7-1)5}{2} = 35-15$
$a = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)d}{2}$	$20 = \frac{245}{7} - \frac{(7-1)5}{2} = 35-15$

इस प्रकार हमने आदिधन के लिये सर्वधन के द्वारा ठीक वही सूत्र प्राप्त कर लिया है, जिसका श्लोक में उल्लेख है। वास्तव में बीजगणितीय समीकरण के सामान्य नियमों के द्वारा किसी भी धन के परिज्ञान के आधार पर आदिधन का पता लगाया जा सकता है। जैसे अन्त्यधन (ℓ) के आधार पर–

$\ell = a + (n-1)d \qquad 50 = 20 + (7-1)5 = 20 + 30$

$a = \ell - (n-1)d \qquad 20 = 50-(7-1)5 = 50-30$

मध्यधन के आधार पर–

$m = \frac{a + \ell}{2} \qquad 35 = \frac{20 + 50}{2}$

$2m = a + \ell \qquad 70 = 20+50$

$a = 2m - \ell \qquad 20 = 70-50$

सर्वधन के सूत्र में उल्लिखित सूत्र के आधार पर–

$s = \frac{n(a + \ell)}{2} \qquad 245 = \frac{7(20+50)}{2} = 7 \times 35$

$$\frac{2s}{n} = a + \ell \qquad \frac{490}{7} = 20 + 50$$

$$a = \frac{2s}{n} - \ell \qquad 20 = \frac{490}{7} - 50 = 70\text{-}50$$

द्वितीय उदाहरण के आदिधन को भी श्लोकोक्त सूत्र के अनुसार इस प्रकार प्राप्त करते हैं–

$$a = \frac{s}{n} - \frac{(n\text{-}1)d}{2},\ a = \frac{1170}{4 \times 30} - \frac{(30\text{-}1)\frac{1}{2}}{2} \Rightarrow \frac{1170}{120} - \frac{29}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{117}{12} - \frac{29}{4} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2} \text{ आदिधन}$$

प्रचयज्ञानाय करणसूत्रम्

पदहृतफलं मुखोनं निरेकपददलहृतं प्रचयः[१]।

न्यासः।। आदिः 20। उ० 0। गच्छः 7। गणितम् 245। लब्धमुत्तरः 5। द्वितीये न्यासः।। आ $\frac{5}{2}$। उ० 0। ग० 30। गणितम् $292\frac{1}{2}$। लब्धमुत्तरः $\frac{1}{2}$।

सुक्षेमा अनुवाद–पद अथवा गच्छ (n) से विभाजित फल अथवा सर्वधन (s) में से मुख या आदि धन (a) को घटावें। प्राप्त संख्या को 1 कम पद (n) से विभाजित करें तो प्रचय (d) का परिज्ञान होता है।

अनुशीलन-प्रस्तुत नियमानुसार प्रचय (d) के लिये यह सूत्र प्राप्त करते हैं–

प्रथम उदाहरण में समन्वय

$$\text{प्रचय } (d) = \frac{2\left(\frac{s}{n} - a\right)}{n - 1} \qquad \frac{2\left(\frac{245}{7} - 20\right)}{7\text{-}1} = \frac{2\,(35\text{-}20)}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

यह सूत्र पूर्वोक्त सर्वधन के सूत्र के आधार पर समीकरण द्वारा अनायास प्राप्त है–

१. यह सूत्र पूर्वोक्त पृ. 101 में वर्णित पाटी-गणित से ध्वनित है।

सूत्र	उदाहरण
$s = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$	$245 = \frac{7}{2}\{2 \times 20 + (7-1)5\} = \frac{7}{2} \times 70 = \frac{490}{2}$
$\frac{2s}{n} = 2a + (n-1)d$	$\frac{490}{7} = 2 \times 20 + (7-1)5 = 40 + 30$
$(n-1)d = \frac{2s}{n} - 2a$	$6 \times 5 = \frac{490}{7} - 2 \times 20 = 70-40$
$d = \frac{\frac{2s}{n} - 2a}{n-1}$	$5 = \frac{\frac{490}{7} - 2 \times 20}{7-1} = \frac{70-40}{6} = \frac{30}{6} = 5$
अथवा $d = \frac{\left(\frac{s}{n} - a\right)}{n-1}$	$\frac{2\left(\frac{245}{7} - 20\right)}{7-1} = \frac{2 \times (35-20)}{6} = \frac{30}{6} = 5$

पूर्वोक्त अन्त्यधन (ℓ) के सूत्र के आधार पर भी प्रचय (d) के लिये सूत्र प्राप्त हो सकता है–

$\ell = a + (n-1)d$	$20 + (7-1)5$	$= 50$
$(n-1)d = \ell - a$	$(7-1)5 = 50-20$	$= 30$
$d = \frac{\ell - a}{n-1}$	$50-20 = \frac{30}{6}$	$= 5$

मध्यधन के आधार पर भी प्रचय (d) के लिये सूत्र प्राप्त है–

मध्यधन $(m) = \frac{2a + (n-1)d}{2}$ $\quad \frac{40 + 30}{2} = \frac{70}{2} = 35$

$2m = 2a + (n-1)d$	2×35	$= 40 + 30$	$= 70$
$(n-1)d = 2m-2a$	6×5	$= 70-40$	$= 30$
$d = \frac{2m-2a}{n-1}$	5	$= \frac{70-40}{6} = \frac{30}{6}$	$= 5$

द्वितीय उदाहरण के प्रचय (d) को भी श्लोकोक्त नियमानुसार प्राप्त करते हैं–

सूत्र **उदाहरण**

$$d = \frac{2\left(\frac{s}{n} - a\right)}{n-1} \qquad \frac{2\left(\frac{1170}{4\times 30} - \frac{5}{2}\right)}{30-1} = \frac{2\left(\frac{1170}{120} - \frac{5}{2}\right)}{29} = \frac{\frac{2\,(1170-300)}{120}}{29}$$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{870}{122} \times \frac{1}{29} = \frac{1740}{3480} = \frac{1}{2}$$

गच्छज्ञानाय सूत्रम्

अष्टोत्तरहतफलतो द्विगुणादिप्रचयविवरकृतियुक्तात्।
मूलं द्विगुणमुखोनं सचयं द्विचयोद्धृतं गच्छः[१]।। 41।।

न्यासः।। आदिः 20। उ० 5। गच्छः 0। गणितम् 245 लब्धो गच्छः 7। द्वितीयोदाहरणे न्यासः।। $\frac{5}{2}$। उ० $\frac{1}{2}$। गच्छः 0।

सुक्षेमा अनुवाद-8 संख्या से गुणित उत्तर या चय (d) तथा उससे गुणित फल या सर्वधन (s) प्राप्त करें। पुनः 2 से गुणित आदिधन (a) में से प्रचय (d) को घटाकर उसका वर्ग करें। पूर्वोक्त गुणनफल में इस वर्ग को जोड़ दें। पुनः इसका वर्गमूल प्राप्त करें। इसमें से द्विगुणित मुख या आदिधन (a) चय (d) को घटाने से प्राप्त संख्या को घटावें। पश्चात् द्विगुणित चय (d) से भाग देवें तो गच्छ (n) प्राप्त होता है।

अनुशीलन-श्लोक के इस विवरण के अनुसार हम गच्छ (n) के लिये यह सूत्र प्राप्त करते हैं-

$$\text{गच्छ } (n) = \frac{\sqrt{(2a-d)^2 + 8sd} - (2a-d)}{2d}$$

इस प्रकार यहाँ गच्छ (n) को वर्ग-समीकरण के सूत्र द्वारा हल किया गया है। श्रीधराचार्य ने अपने अन्य ग्रन्थ में वर्ग-समीकरण का सूत्र दिया है। जिसे भास्कराचार्य ने अविकल रूप से उद्धृत करते हुए अपनाया है। यहाँ गच्छ (n) ज्ञात करने के लिये इसे द्विघात-समीकरण के आकार में प्रस्तुत करना सम्भव होने के कारण यह सूत्र अन्वित होता है। अतः प्रथम सर्वधन के उपाय से अज्ञात गच्छ (n) के लिये द्विघात समीकरण का आकार प्राप्त करते हैं-

---

१. तुल. आर्यभटीय, गणितपाद 1.20, ब्रा.स्फु.सि. 12.18, ग.कौ.पृ. 107, सि.शे. 13.24, लीलावती श्रेढ़ी व्यवहार श्लोक 5

$$\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\} = s$$

$$n\{2a+(n-1)d\} = 2s$$

$$n\{2a+nd-d\} = 2s$$

$$2an+n^2d-nd-2s = 0$$

$$dn^2+2an-nd-2s = 0$$

$$dn^2+(2a-d)n-2s = 0$$

इस क्रम का अनुसरण करते हुए त्रिशतिकाकार के प्रथम उदाहरण को इस प्रकार प्रस्तुत कर सकते हैं–

d a d S

$$5n^2 + (2x20-5)\,n - 2\times 245 = 0$$

$$\Rightarrow 5n^2+35n-490=0$$

इस स्थिति में पूर्वोक्त सूत्र–

$$n=\frac{\sqrt{1225+9800}-35}{10}$$

$$=\frac{105-35}{10}=7$$

इस सूत्र की उपपत्ति के लिये प्रस्तुत प्रश्न को बीजगणितीय समीकरण के सामान्य नियमों द्वारा हल करते हैं-

$$5n^2+35n=490$$

सभी पक्षों को 4a से गुणा करने पर–

$$\Rightarrow 100n^2 + 700n = 9800$$

$$\Rightarrow (10n)^2 + 2\times 10n \times 35 + 35^2 = 1225 + 9800$$

$$(10n+35)^2 = 1225+9800$$

$$10n + 35 = \sqrt{1225+9800}$$

$$n = \frac{\sqrt{1225+9800}-35}{10} = n = 7$$

इस प्रकार हमने ठीक वही सूत्र प्राप्त कर लिया है, जिसका उपरिलिखित श्लोक में उल्लेख किया है। श्रीधराचार्य का वर्ग–समीकरण का सामान्य सूत्र तथा आधुनिक सूत्र भी ठीक इसके अनुरूप है। अतः सिद्ध है कि वर्ग–समीकरण के

सामान्य नियम द्वारा इसका हल प्राप्त किया गया है। इस प्रकार गच्छ (n) का मान 7 प्राप्त हो जाता है।

द्वितीय उदाहरण को भी उपरिलिखित विधि से हल करते हैं–

उदाहरणानुसार सर्वधन $\times 2 = \{2 \times \frac{5}{2} + (n-1)\frac{1}{2}\}\, n = \frac{1170}{2} = 585$

$$\Rightarrow \{2 \times \tfrac{5}{2} + (n-1)\tfrac{1}{2}\}\, n - \frac{1170}{2} = 0$$

वर्गसमीकरण का आकार... $\Rightarrow \frac{1}{2}\ n^2 + \frac{9}{2}\ n - 585 = 0$

सभी पक्षों को 4a से गुणा करने पर $\Rightarrow 1n^2 + 9n - 1170 = 0$

$$\Rightarrow (1n)^2 + 2 \times 1n \times \tfrac{9}{2} + (\tfrac{9}{2})^2 = (\tfrac{9}{2})^2 + 1170$$

$$\Rightarrow (n + \tfrac{9}{2})^2 = \tfrac{81}{4} + 1170$$

$$\Rightarrow n + \tfrac{9}{2} = \sqrt{\tfrac{81}{4} + 1170}$$

$$\Rightarrow n = \sqrt{\tfrac{81}{4} + 1170} - \tfrac{9}{2}$$

$$n = \tfrac{69}{2} - \tfrac{9}{2} = \tfrac{60}{2} = 30$$

इस समीकरण के द्वारा पुनः श्लोकोक्त सूत्र को प्राप्त कर लिया गया है।

रेखा - गणितम्

क्षेत्रव्यवहारे करणसूत्रम्

समचतुरस्त्रायतयोर्भुजकोटिहतिः प्रजायते गणितम्।।

सुक्षेमा अनुवाद-समकोण वाले चतुर्भुज वर्ग (square) अथवा आयत (rectangle) की भुज या आधार (base) तथा कोटि अर्थात् लम्ब (perpendicular) का गुणनफल ही उनका गणित या क्षेत्रफल होता है।

अनुशीलन-प्रस्तुत श्लोक में वर्ग तथा आयत के क्षेत्रफल के सूत्र अंकित हैं। इसके अनुसार-

वर्ग का क्षेत्रफल = भुज × कोटि (लम्बाई × चौड़ाई) अथवा भुज^2 या कोटि^{2}

आयत का क्षेत्रफल = भुज × कोटि (लम्बाई × चौड़ाई)

उदाहरणम्

समचतुरस्त्रक्षेत्रे चतुष्कबाहौ च किं भवेद् गणितम्।
सार्धत्रिकरभुजे च यदि गणितविधिं विजानासि[१]।। 75।।

न्यासः 4 [वर्ग: ऊपर 4] 4 लब्धं क्षेत्रफलम् 16 [वर्ग] $\frac{7}{2}$ लब्धं क्षेत्रफलम् $12\frac{1}{4}$

सुक्षेमा अनुवाद-समकोण वाले चतुष्कोणीय वर्ग में, जिसकी प्रत्येक भुजा 4 मात्रा की है, उसका क्षेत्रफल क्या होगा। इसी प्रकार $3\frac{1}{2}$ या $\frac{7}{2}$ मात्रा की एक भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल बताओ, यदि गणित विधि जानते हो।

अनुशीलन-यहाँ पूर्वोक्त नियमानुसार-

प्रथम वर्ग का क्षेत्रफल $= 4 \times 4 = 16$

द्वितीय वर्ग का क्षेत्रफल $= \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$

---

१. यह श्लोक पाटी-गणित उदा. 122 पृ. 161 से तुलनीय है-
समचतुरश्रे क्षेत्रे बाहुसमा वक्त्रभूमिलम्बाः स्युः।
तेऽध्यर्धहस्तसंख्याः कथय सखे किं फलं तत्र।।
यहाँ $\frac{3}{2}$ भुज कोटि वाले चतुर्भुज का क्षेत्रफल पूछा है। स्पष्टतः $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ हस्त या 2 हस्त 6 अंगुल

द्वितीयोदाहरणम्

आयतचतुरस्रस्य च त्रिहस्तकोटेश्चतुःकर भुजस्य।
अध्यर्धकरभुजस्य च करार्धकोटेः फलं कथय[१]।। 76।।

4 3

न्यासः 3 $\frac{1}{2}$ लब्धे क्षेत्रफले 12। $\frac{3}{4}$।।

सुक्षेमा अनुवाद-किसी 3 हाथ कोटि या लम्ब तथा 4 हाथ भुज अथवा आधार वाले चतुष्कोणीय आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल बताओ तथा इसी प्रकार $1\frac{1}{2}$ या $\frac{3}{2}$ हाथ या भुज तथा $\frac{1}{2}$ हाथ कोटि वाले आयत का क्षेत्रफल कहो।

अनुशीलन-यहाँ आयत के क्षेत्रफल का उदाहरण प्रस्तुत है। श्लोक के नियमानुसार–

4 हाथ कोटि या लम्ब तथा 3 हाथ भुज या आधार वाले आयत का क्षेत्रफल $= 4 \times 3 = 12$ हाथ^2

$\frac{1}{2}$ हाथ लम्ब तथा $\frac{3}{2}$ हाथ आधार वाले आयत का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$ हाथ^2

अन्यत् करणसूत्रम्

चतुरस्रेष्वन्येषु च लम्बगुणं कुमुखयोगार्धम्[२]।। 42।।

सुक्षेमा अनुवाद-अन्य चतुष्कोणीय चतुर्भुज अर्थात् समलम्ब चतुर्भुज (trapezium) का क्षेत्रफल समलम्ब के आधार वाली कु तथा मुख नामक दोनों भुजाओं के योग के आधे को शीर्षलम्ब (perpendicular) के साथ गुणनफल से प्राप्त होता है।

अनुशीलन-इस श्लोक में समलम्ब चतुर्भुज के क्षेत्रफल प्राप्त करने की विधि बताई गई है। जिस चतुर्भुज की दो भुजाएँ समान्तर हों उसे समलम्ब चतुर्भुज कहते हैं। इन भुजाओं के किसी भी बिन्दु से समान्तर रेखा तक सरल रेखा में खींचे गए शीर्ष लम्ब की दूरी बराबर होती है। पर इनकी अन्य दो भुजाएँ असमान्तर होने से इनके बिन्दुओं से दूसरी असमान्तर रेखा तक खींची गई सरल रेखा की दूरी बराबर नहीं होती। श्लोक के अनुसार इस समलम्ब के क्षेत्रफल का सूत्र इस प्रकार होगा–

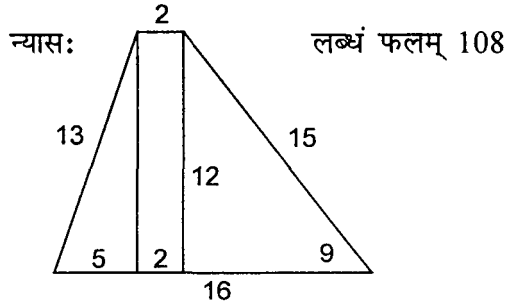
---

१. तुलनीय - यत्रायतचतुरश्रे भूवदने सार्धपञ्चकरसंख्ये।
पार्श्वभुजमध्यलम्बास्त्रिहस्तकास्तत्र किं गणितम्। पाटी-गणित श्लोक 123, पृ. 161 यहाँ 3 हाथ लम्बे तथा $\frac{11}{2}$ आधार वाले आयताकार पात्र का क्षेत्रफल पूछा है।
स्पष्टतः $3 \times \frac{11}{2} = \frac{33}{2}$ अर्थात् 16 हाथ तथा 12 अंगुल।।

२. तुल. भूवदनसमासार्धं मध्यमलम्बेन संगुणितम्– पाटी-गणित सूत्र 115, पृ. 161 तथा म.सि. 15.78, सि.शे. 13.30, लीलावती क्षेत्रव्यवहार श्लोक 23

समलम्ब का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (समान्तर रेखाएँ क्रमशः 'कु' + 'मुख') × शीर्षलम्ब (h)

उदाहरणम्

यस्य द्विकरमुखमृजु लम्बो द्वादश चतुष्कृतिर्भूमिः।
त्रिकपञ्चकसहिता दश पार्श्वभुजौ तस्य किं गणितम्।। 77।।

सुक्षेमा अनुवाद-जिस समलम्ब चतुर्भुज की समान्तर भुजाओं में से मुख या ऊपर की भुजा (b_2) 2 हाथ है तथा भूमि या आधार भुजा (b_1) 4^2 अर्थात् 16 हाथ है तथा उस पर सरल रेखा में 12 हाथ का शीर्षलम्ब खींचा गया है। इसकी पार्श्व की असमान्तर भुजाएँ क्रमशः 13 तथा 15 हाथ हैं। ऐसे चतुर्भुज का क्षेत्रफल क्या होगा।

अनुशीलन-त्रिशतिका में वर्णित चित्र में अंकित संख्या तिगुने मिलीमीटर हैं। यहाँ आधार रेखा 'कु' 16 तथा इसके समान्तर मुख रेखा 2 हाथ वाली है इसमें 12 हाथ का शीर्षलम्ब है। अतः सूत्रानुसार–

$\frac{1}{2}(16 + 2) \times 12 = 9 \times 12 = 108$ वर्ग हस्त

इसकी उपपत्ति के लिये आगे प्रदर्शित चित्र के अनुसार इनके 3 अलग-अलग आयत का रूप देते हैं–

प्रथम आयत का क्षेत्रफल = $12 \times 5 = 60$ वर्ग हस्त

द्वितीय आयत का क्षेत्रफल = $12 \times 2 = 24$ वर्ग हस्त

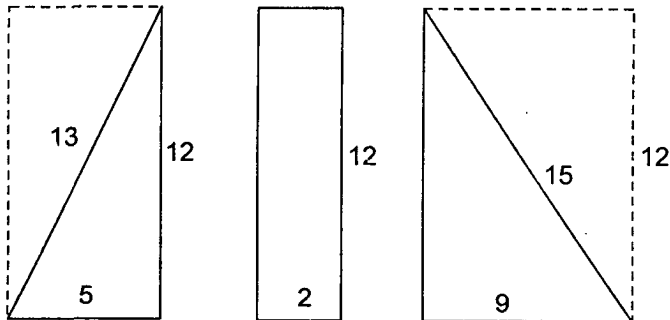
तृतीय आयत का क्षेत्रफल = $12 \times 9 = 108$ वर्ग हस्त

प्रथम तथा तृतीय आयत का आधा त्रिभुज है। अतः

प्रथम त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{60}{2}$ = 30 वर्ग हस्त

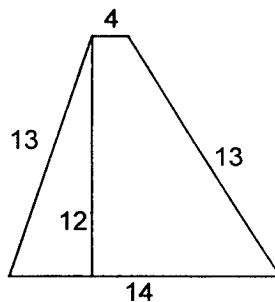
तृतीय त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{108}{2}$ = 54 वर्ग हस्त

द्वितीय आयत का क्षेत्रफल = 24 वर्ग हस्त

सम्पूर्ण त्रिभुज का कुल क्षेत्रफल = 108 वर्ग हस्त

इस से रेखा-गणित का यह प्रमेय सिद्ध है कि समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके शीर्षलम्ब और समान्तर भुजाओं के योगफल के गुणनफल का आधा होता है।

अन्यदुदाहरणम्

भूमिश्चतुर्दशकरा द्वादश लम्बो मुखं तु चत्वारः।
त्रियुता दश पार्श्वभुजौ यस्य सखे तस्य किं गणितम्।। 78।।

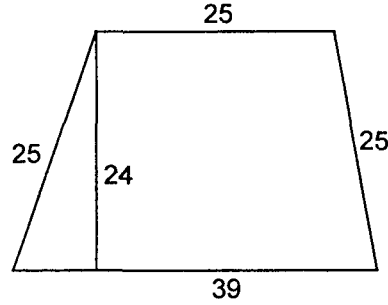
न्यासः

लब्धं फलम् 108।।

सुक्षेमा अनुवाद-जिस समलम्ब चतुर्भुज की भूमि या आधार 14 हाथ है तथा मुख या ऊपर की भुजा 4 हाथ है। उस पर 12 हाथ का शीर्षलम्ब है। इसकी असमान्तर पार्श्व की दोनों भुजाएँ 13-13 हाथ हैं। हे मित्र! ऐसे समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल क्या होगा।

अनुशीलन-उपरिलिखित सूत्रानुसार-

समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(14 + 4) \times 12 = 9 \times 12 = 108$ वर्ग हस्त।

अन्यदुदाहरणम्

त्रिगुणास्त्रयोदश धरा पञ्चकृतिर्यस्य बाहुवदनानि।
लम्बस्त्रयोऽष्टगुणितास्तस्य फलं कथय यदि वेत्सि[१]।। 79।।

लब्धं फलम् 768

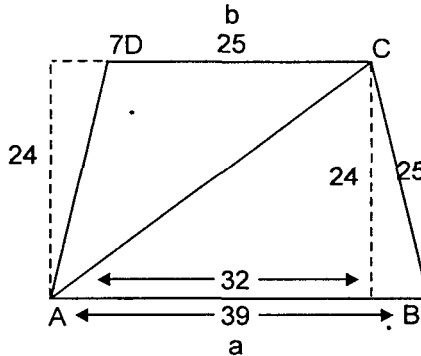
सुक्षेमा अनुवाद-जिस चतुर्भुज की धरा या आधार $13 \times 3 = 39$ हाथ है, जिसकी ऊपर की भुजा $5^2 = 25$ हाथ है तथा पार्श्व की असमान्तर दोनों भुजाएँ भी 5^2 या 25-25 हाथ हैं। जिसका शीर्षलम्ब $3 \times 8 = 24$ हाथ है। उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल यदि जानते हो तो बताओ।

अनुशीलन-उपरिलिखित सूत्रानुसार-

समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(39 + 25) \times 24$

$= 32 \times 24 = 768$ हाथ^2

विकर्ण के उपयोग से त्रिभुज के सूत्र द्वारा भी यही परिणाम प्राप्त करते हैं-

१. तुल. पाटी-गणित उदा. 128

अंकित संख्याएँ मिलीमीटर के ठीक अनुरूप हैं।

यहाँ AC विकर्ण द्वारा प्राप्त दोनों त्रिभुजों के सूत्रानुसार क्रमशः क्षेत्रफल–

ABC का क्षेत्रफल $\frac{39}{2} \times 24 = 468$ हाथ^2

ACD का क्षेत्रफल $\frac{25}{2} \times 24 = 300$ हाथ^2

अतः चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= 468 + 300 = 768$ हाथ^2

लम्बज्ञानाय सूत्रम्

भुजयुतिदलं चतुर्धा भुजहीनं तद् वधात् पदं गणितम्।
चतुरस्त्रे त्र्यस्त्रे वा क्षेत्रे कुदलं च लम्बहृतम्।। 43।।

सुक्षेमा अनुवाद–चतुर्भुज या त्रिभुज का क्षेत्रफल प्राप्त करने के लिये चारों भुजाओं के माप को जोड़े तथा उसका आधा करे। इस फल को चार बार रख कर प्रत्येक बार फल से अलग-अलग भुजा को घटावें। इन प्राप्त संख्याओं को आपस में गुणित करके इनका पद या वर्गमूल प्राप्त करे। प्राप्त फल ही चतुर्भुज या त्रिभुज का गणित या क्षेत्रफल होता है।

अथवा त्रिभुज का क्षेत्रफल प्राप्त करने के लिये 'कु' या आधार भुजा का दल या $\frac{1}{2}$ को शीर्षलम्ब से गुणित करे।

अनुशीलन–इस सूत्र में एक ही नियम से चतुर्भुज तथा त्रिभुज का क्षेत्रफल जानने का प्रयास किया गया है[१]। इसके अनुसार त्रिभुज एक ऐसा चतुर्भुज है, जिसकी एक भुजा $d = 0$ हो। इस दशा में यदि चारों भुजाओं को a, b, c, d नाम दें तथा भुज-युति-दल या semi-perimeter को s कहें तो सूत्र यह होगा–

चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

त्रिभुज में क्योंकि $d = 0$ है, अतः इसके क्षेत्रफल को

$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-0)}$ इस प्रकार प्रकट करेंगे। अतः सूत्र–

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

द्वितीय नियम के अनुसार सूत्र इस प्रकार होगा–

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार $\times$ शीर्षलम्ब अथवा $\frac{1}{2} b \times h$

१. चतुर्भुज या त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूक्ष्म फल ज्ञात करने का यह सूत्र मूलतः ब्रह्मगुप्त से प्राप्त किया गया है–
भुजयोगार्धचतुष्टयभुजोनघातात् पदं सूक्ष्मम्। - ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त 12.21

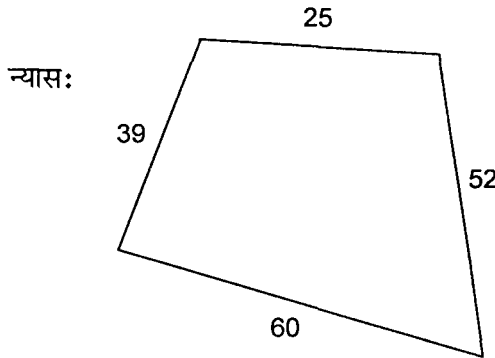
यहाँ श्रीधर ने ब्रह्मगुप्त की भावना को स्वीकार करते हुए इसे चतुर्भुज तथा त्रिभुज में समान रूप से लागू होने वाला सूत्र बताया है। इन्होंने अपनी पाटी-गणित में इस मान्यता का विस्तार करते हुए कहा है कि यह सूत्र सभी वर्ग-चतुर्भुज, सभी प्रकार के विषम-लम्ब चतुर्भुज में भी समन्वित होता है[१]।

आगे चलकर इस तथ्य की न्यूनता का अनुभव कर लिया गया था। आर्यभट द्वितीय तथा भास्कराचार्य ने अत्यन्त स्पष्ट शब्दों में कहा कि सभी प्रकार के विषम लम्ब चतुर्भुजों में विकर्ण (diagonal) खींचे बिना इसका सूक्ष्म क्षेत्रफल प्राप्त नहीं किया जा सकता। आधुनिक गणित में यह मान्य है कि ब्रह्मगुप्त तथा श्रीधर का यह सूत्र केवल चक्रीय चतुर्भुज (cylic quadrilaterals) के लिये ही पूर्ण रूप से सही उतरता है।

आगे श्रीधराचार्य ने सावधानी पूर्वक ऐसे ही चतुर्भुज का उदाहरण दिया है, जिसमें यह सूत्र सही प्रकार समन्वित हो सके–

उदाहरणम्

पञ्चकृतिर्यस्य मुखं षष्टिर्भूमिर्भुजौ त्रयोदशकरौ।
त्रिचतुर्गुणौ यथाक्रममृजुनि सखे तस्य किं गणितम्।। 80।।

न्यासः

लब्धं फलम् 1764 पूर्वोक्तचतुरस्रस्य त्र्यस्रस्यापि फलं तदेव।

सुक्षेमा अनुवाद–हे मित्र, जिस चतुर्भुज की सम्मुख भुजा 5 का वर्ग अर्थात् 25, आधार 60 तथा पार्श्व भुजाएँ क्रमशः $13 \times 3 = 39$ तथा $13 \times 4 = 52$ हाथ हैं, उसका क्षेत्रफल क्या होगा।

अनुशीलन–इसके क्षेत्रफल के लिये पूर्वोक्त प्रथम सूत्र समन्वित करने पर–

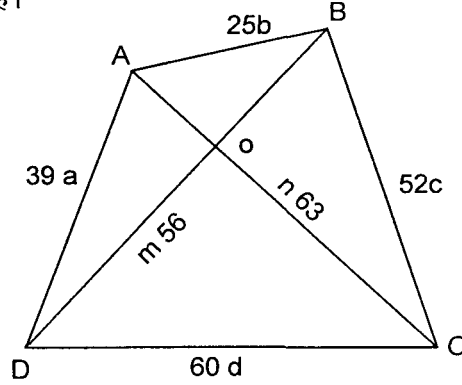
---

१. सदृशासमलम्बानामसदृशलम्बे विषमबाहौ। - पाटी-गणित, क्षेत्रव्यवहार, श्लोक 11

भुजयुतिदल या $s = \frac{1}{2}\ (25 + 52 + 60 + 39) = 88$

चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{(88\text{-}25) \times (88\text{-}52) \times (88\text{-}60) \times (88\text{-}39)}$

$\Rightarrow \sqrt{63 \times 36 \times 28 \times 49} \Rightarrow \sqrt{3111696} = 1764$ वर्ग हस्त

इसके चक्रीय चतुर्भुज होने के कारण इस सूत्र के द्वारा प्राप्त फल सर्वथा सुनिश्चित एवं वास्तविक है। इसमें एक सुनिश्चित विकर्ण (diagonal) खींच कर हम यही परिणाम प्राप्त करते हैं।

श्रीधराचार्य ने चक्रीय चतुर्भुज के लिये बनने वाले विकर्ण की नाप नहीं बताई है। अतः ब्रह्मगुप्त के सूत्र[१] के द्वारा पहले इसे ज्ञात करते हैं।

AC विकर्ण की परिमाप ज्ञात करने के लिये-

$$n = \sqrt{\frac{(39 \times 25 + 60 \times 52)\ (39 \times 52 + 60 \times 25)}{52 \times 25 + 39 \times 60}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{(975 + 3120)\ (2028 + 1500)}{1300 + 2340}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{4095 \times 3528}{3640}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{14447160}{3640}} \qquad \Rightarrow \sqrt{3969} \Rightarrow 63 \text{ विकर्ण AC}$$

BD विकर्ण की परिमाप ज्ञात करने के लिये–

$$m = \sqrt{\frac{(52 \times 25 + 39 \times 60)\ (39 \times 52 + 60 \times 25}{39 \times 25 + 60 \times 52}}$$

---

१. कर्णाश्रितभुजघातैक्यमुभयथाऽन्योन्यभाजितं गुणयेत्।
योगेन भुजप्रतिभुजवधयोः कर्णौ पदे विषमे।। - ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त 12.28

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{(1300+2340)(2028+1500)}{975+3120}} \Rightarrow \sqrt{\frac{3640 \times 3528}{4095}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{12841920}{4095}} \qquad \Rightarrow \sqrt{3136} = 56 \Leftarrow \text{विकर्ण BD}$$

चक्रीय चतुर्भुज के लिये विकर्णों की यह परिमाप सही है। क्योंकि इसके नियमानुसार–

$$63 \times 56 = 25 \times 60 + 39 \times 52$$

$$\Rightarrow 3528 = 1500 + 2028 = 3528$$

m विकर्ण के द्वारा यहाँ $\triangle$ ABD तथा $\triangle$ BCD ये दो त्रिभुज प्राप्त होते हैं। श्रीधर के त्रिभुज के प्रथम सूत्र के अनुसार इनका अलग-अलग क्षेत्रफल प्राप्त करके इन्हें जोड़ने पर चतुर्भुज का क्षेत्रफल प्राप्त होगा। इस प्रकार–

$\triangle$ ABD का भुजयुतिदल या $s = \frac{1}{2}(39 + 25 + 56) \quad = \quad 60$

क्षेत्रफल $= \sqrt{60 \times 21 \times 25 \times 4} = \sqrt{176400} \quad = \quad 420$

$\triangle$ BCD का भुजयुतिदल या $s = \frac{1}{2}(60 + 52 + 56) \quad = \quad 84$

क्षेत्रफल $= \sqrt{84 \times 24 \times 32 \times 28} = \sqrt{1806336} \quad = \quad = \underline{1344}$

दोनों के योग से चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \underline{1764}$ वर्ग हस्त

63 परिमाप वाले n विकर्ण को खींचने से प्राप्त 2 त्रिभुजों को जोड़ने पर भी ठीक यही परिणाम प्राप्त करते हैं–

$\triangle$ ABC का भुजयुति दल या $s = \frac{1}{2}\ (63 + 25 + 52) = 70$

इसका क्षेत्रफल $= \sqrt{70 \times 7 \times 45 \times 18} = \sqrt{396900} \quad = 630$

$\triangle$ ADC का भुजयुति दल या $s = \frac{1}{2}(63 + 39 + 60) = 81$

इसका क्षेत्रफल $= \sqrt{81 \times 18 \times 42 \times 21} = \sqrt{1285956} \quad = \underline{1134}$

दोनों के योग से चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \underline{1764}$

इस प्रकार चक्रीय चतुर्भुज के सूत्र के परिणाम को पुनः प्राप्त कर लिया गया है।

श्रीधराचार्य के त्रिभुज के दूसरे सूत्र द्वारा भी हम यही परिणाम प्राप्त करते हैं। पर उसके लिये पहले त्रिभुज के लम्ब या आबाधा को जानना आवश्यक होगा। एक विकर्ण के सापेक्ष दूसरे विकर्ण का एक खण्ड (segment) आबाधा या

उसका लम्ब है। क्योंकि इस विशेष चतुर्भुज में दोनों विकर्ण एक दूसरे पर लम्बवत् हैं। अतः इस आबाधा को त्रिभुज का लम्ब कहा जा सकता है। श्रीधर ने अन्य आबाधा की अपेक्षा किये बिना आबाधा जानने का सूत्र नहीं दिया है। अतः पहले भास्कराचार्य के सूत्र[१] का उपयोग करते हुए दोनों विकर्णों की आबाधा ज्ञात करते हैं–

DO तथा OB का अलग-अलग परिमाप $= \frac{1}{2}\left(56 \pm \frac{39^2-25^2}{56}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(56 \pm \frac{1521-625}{56}\right) \quad \Rightarrow \frac{1}{2}(56 \pm 16) \quad \Rightarrow$ 36 तथा 20

CO तथा OA का अलग-अलग परिमाप $= \frac{1}{2}\left(63 \pm \frac{60^2-39^2}{63}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(63 \pm \frac{3600-1521}{63}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(63 \pm 33) \quad \Rightarrow$ 48 तथा 15

इस प्रकार आबाधा का अलग-अलग परिमाप ज्ञात कर लेने पर त्रिभुज के क्षेत्रफल का द्वितीय सूत्र समन्वित करते हैं–

$\triangle$ABD का क्षेत्रफल $= \frac{56}{2} \times 15 = 420$

$\triangle$BCD का क्षेत्रफल $= \frac{56}{2} \times 48 = 1344$

योग $= 1764$

$\triangle$ABC का क्षेत्रफल $= \frac{63}{2} \times 20 = 630$

$\triangle$ADC का क्षेत्रफल $= \frac{63}{2} \times 36 = 1134$

योग $= 1764$

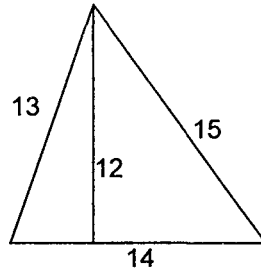
इन दोनों प्रकार के त्रिभुजों का योग वही 1764 होता है। इससे भी हमने ठीक वही पूर्वोक्त परिणाम प्राप्त कर लिया है।

अन्यदुदाहरणम्

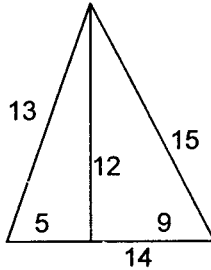
एको भुजस्त्रयोदश पञ्चदशान्यस्त्रिबाहुनि क्षेत्रे।
चतुराधिकदशभूमि द्वादश लम्बः कियद् गणितम्।। 81।।

---

१. त्रिभुजे भुजयोर्योगस्तदन्तरगुणो भुवा हृतो लब्ध्या।
द्विष्ठा भूरूनयुता दलिताऽऽबाधे तयोः स्याताम्।। –लीलावती, क्षेत्रव्यवहार, श्लोक 18

न्यासः

लब्धं फलम् 84

सुक्षेमा अनुवाद-किसी त्रिभुज वाले क्षेत्र की एक भुजा 13 तथा अन्य पार्श्ववर्ती भुजा 15 है। इसकी 4 अधिक 10 अर्थात् 14 भूमि या आधार है तथा 12 शीर्षलम्ब है। इसका क्षेत्रफल क्या होगा।

अनुशीलन-सही नापियों के निम्नांकित चित्र का क्षेत्रफल इस प्रकार है–

अंकित संख्याओं से दुगुने मिलीमीटर हैं।

यहाँ श्लोक 43 के प्रथम सूत्र को समन्वित करने पर–

भुजयुतिदल या $S = \frac{1}{2}(13+14+15) = 21$

अतः क्षेत्रफल $= \sqrt{21\ (21-13)\ (21-14)\ (21-15)}$

$$\Rightarrow \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} \Rightarrow \sqrt{7056} = 84$$ वर्ग हस्त

द्वितीय 'कुदलं च लम्बहृतम्' अथवा '$\frac{1}{2}$ आधार $\times$ शीर्षलम्ब' को समन्वित करने पर–

$7 \times 12 = 84$ वर्ग हस्त।

श्लोक उदा. 77 के अनुशीलन से इसकी उपपत्ति गतार्थ है।

क्षेत्रविशेषेषु सूत्रम्

त्रिभुजं गजदन्ताकृति नेम्याकारं चतुर्भुजं क्षेत्रम्।
बालेन्दौ त्रिभुजे द्वे वज्रे च चतुर्भुजद्वितयम्[१]।। 44।।

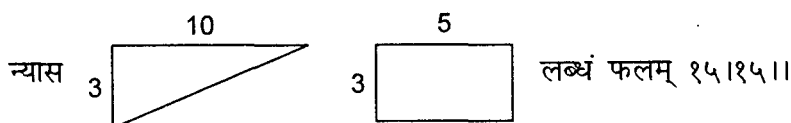
सुक्षेमा अनुवाद-हाथी के दाँत की आकृति का त्रिभुज तथा नेमि या आयताकार का चतुर्भुज क्षेत्र बनता है। बालेन्दु के आकार में दो त्रिभुज तथा वज्र के आकार में दो चतुर्भुज बनते हैं।

अनुशीलन-हाथी दाँत के आकार की खूँटी बनती है। इस त्रिभुज के आधार से खींची गई लम्ब रेखा समकोण बनाती है। नेम्याकार आयत चतुर्भुज ऐसा समान्तर चतुर्भुज है जिसका कोई एक कोण समकोण होता है। इनका उदाहरण आगे दिया जा रहा है—

उदाहरणम्

गजदन्ते त्रिकरधरे दशकरलम्बे भवेत् कियद् गणितम्।
नेम्याकृतिनि क्षेत्रे त्रिकरधरे पञ्चलम्बे च[२]।। 82।।

न्यास

लब्धं फलम् १५।१५।।

सुक्षेमा अनुवाद-हाथी के दाँत के आकार का वह त्रिभुज जिसकी आधारित भुजा 3 हाथ तथा लम्ब 10 हाथ हो, उसका क्षेत्रफल क्या होगा। साथ ही नेमि या आयत चतुर्भुज वाला क्षेत्र, जिसका आधार 3 हाथ तथा लम्ब भुजा 5 हाथ हो। उसका क्षेत्रफल कितना होगा।

अनुशीलन-पूर्वोक्त सूत्र के अनुसार क्षेत्रफल स्पष्ट है—

$\frac{3}{2} \times 10 = \frac{30}{2} = 15$ त्रिभुज का क्षेत्रफल

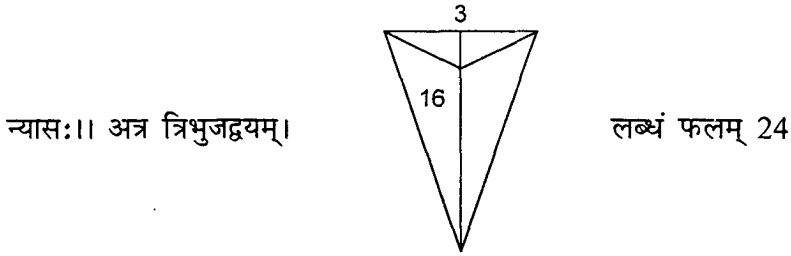
$3 \times 5 = 15$ चतुर्भुज का क्षेत्रफल

द्वितीयोदाहरणम्

मध्यायामः षोडश बालेन्दौ मध्यविस्तरस्त्रिकरः।
त्रिभुजद्वयकल्पनया गणितं किं तत्र कथमाशु[३]।। 83।।

१. तुल. पाटी-गणित सू. 116, म.सि. 15.101, ग.कौ.पृ. 10
२. तुल. पाटी-गणित उदा. 131
३. तुल. पाटी-गणित उदा. 132

न्यासः।। अत्र त्रिभुजद्वयम्।

लब्धं फलम् 24

सुक्षेमा अनुवाद-वह बालेन्दु अर्थात् छोटा दो या तीन कलाओं वाला चन्द्रमा, जिसके मध्य की लम्बाई 16 हाथ तथा बीच की चौड़ाई 3 हाथ है, यदि इसे दो त्रिभुज से निर्मित प्रकल्पित किया जाय तो इनका क्षेत्रफल शीघ्र बताओ।

अनुशीलन-प्रस्तुत उदाहरण में बाल-चन्द्र का आकार बदल कर उपरिलिखित चित्रानुसार १६ हाथ लम्बे तथा डेढ़-डेढ़ हाथ चौड़े दो त्रिभुज का रूप दे दिया गया है।

पूर्व उल्लिखित सूत्रानुसार इन त्रिभुजों का क्षेत्रफल-

प्रथम त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times 16 = \frac{48}{4} = 12$

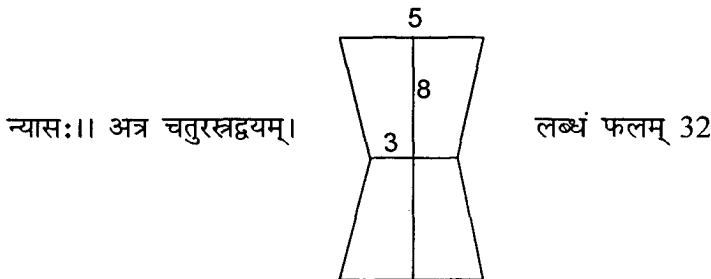
द्वितीय त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times 16 = \frac{48}{4} = 12$

दोनों त्रिभुजों से निर्मित बड़े त्रिभुज का क्षेत्रफल$\Rightarrow 12+12=24$ वर्ग हस्त

तृतीयोदाहरणम्

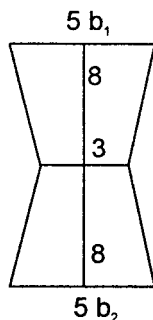
वज्राकृतिनि क्षेत्रे भूवदने पञ्चहस्तके मध्ये।
विस्तारो हस्तत्रयमथ लम्बोऽष्टौ कियद् गणितम्।। 84।।

न्यासः।। अत्र चतुरस्रद्वयम्।

लब्धं फलम् 32

सुक्षेमा अनुवाद-वज्र की आकृति वाला क्षेत्र जिसके भू अर्थात् आधार-भुजा तथा वदन या मुख अर्थात् ऊपर की भुजा 5-5 हाथ है तथा मध्य में 3 हाथ का विस्तार है तथा जिस पर 8 हाथ का शीर्ष लम्ब है, यदि वह दो चतुर्भुज से निर्मित मानी जावे[१] तो उसका क्षेत्रफल क्या होगा।

---

१. 'कियत् फलं तस्य द्विचतुरश्रात्' पाटी-गणित सूत्र 133 के तुलनीय उद्धरण के अनुसार।

संख्याओं के अनुरूप चित्र इस प्रकार है–

भुजाएँ चित्र में अंकित संख्या से 5 गुना मिलीमीटर हैं।

इस आकृति में दो चतुर्भुज प्राप्त होते हैं। दोनों का क्षेत्रफल 32-32 वर्ग हाथ है। ऊपर वाले चतुर्भुज की ऊपर वाली भुजा 5 तथा नीचे की भुजा 3 हाथ है। नीचे वाले में ऊपर वाली भुजा 3 तथा नीचे की भुजा 5 हाथ है। दोनों में 8-8 हाथ का शीर्ष लम्ब है।

यह समलम्ब चतुर्भुज का उदाहरण है। अतः यहाँ श्लोक 42 में प्रोक्त सूत्र लागू होता है–

समलम्ब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(b^1 + b^2) \times$ शीर्षलम्ब (h)

इसके अनुसार $\Rightarrow \frac{1}{2}(5+3) \times 8 = 4 \times 8 = 32$ वर्ग हस्त वाले दो चतुर्भुज

वृत्ते सूत्रम्

वृत्तव्यासस्य कृतेर्मूलं परिधिर्भवति दशगुणायाः।
व्यासार्धवर्गवर्गात् क्षेत्रफलं दशगुणान् मूलम्।। 45।।

सुक्षेमा अनुवाद-वृत्त के व्यास की कृति या वर्ग को 10 से गुणित करके उस सम्पूर्ण का वर्गमूल परिधि होती है। व्यास के आधे के वर्ग के वर्ग को दशगुणित करके उसका वर्गमूल करने से वृत्त का क्षेत्रफल प्राप्त होता है।

अनुशीलन-प्रस्तुत श्लोक में वृत्त की परिधि तथा उसके आधार पर क्षेत्रफल ज्ञात करने का प्रकार बताया गया है। इसके अनुसार परिधि का सूत्र इस प्रकार होगा–

परिधि $= \sqrt{10 \times \text{व्यास}^2}$ अथवा व्यास $\times 3\frac{16}{100}$ या व्यास $\times \frac{316}{100}$

इसके अनुसार व्यास तथा परिधि का अनुपात यह होगा–

$1 : \sqrt{10}$ अथवा $1 : 3.16$ - - - -

त्रिशतिकाकार ने इस अनुपात का या π का यह मान स्वीकार किया है। यद्यपि इनसे पूर्व आर्यभट इससे सूक्ष्म मान का वर्णन कर चुके थे। पर त्रिशतिकाकार के पश्चात् काफी समय तक यह मान ही लोकप्रिय रहा। महावीराचार्य ने भी त्रिशतिकाकार का ही अनुसरण किया है[1]। इस मान को मानते हुए उनके अनुसार परिधि इस प्रकार है–

$$\text{परिधि} = \sqrt{10} \times \text{व्यास}$$

स्पष्टतः यह त्रिशतिकाकार के समतुल्य है।

त्रिशतिकाकार के अनुसार वृत्त का क्षेत्रफल $= \sqrt{10\left(\frac{\text{व्यास}}{2}\right)^4}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{10} \times \text{व्यास} \times \text{व्यास}}{4}$$

अतः वृत्त का क्षेत्रफल $\Rightarrow \frac{\text{परिधि} \times \text{व्यास}}{4}$

अथवा $\frac{\sqrt{10} \times \text{व्यास}^2}{4}$ अथवा $\pi \times \text{त्रिज्या}^2$

त्रिशतिकाकार ने स्पष्टतः अन्तिम सूत्रों को नहीं कहा है। पर आगे चल कर महावीर, भास्कराचार्य आदि ने स्पष्ट रूप से I सूत्र को[2] तथा असाक्षात् रूप से II सूत्र को प्रस्तुत किया है। इससे आधुनिक गणित में III सूत्र को विकसित किया गया है। त्रिशतिकाकार के मूल सूत्र द्वारा भी आधुनिक गणित के सूत्र को आसानी से प्राप्त करना सम्भव है।

उदाहरणम्

दशविष्कम्भे क्षेत्रे समवृत्ते कः प्रजायते परिधिः।
गणितं च कथय विद्वन् गणयित्वा यदि विजानासि।। 85।।

न्यासः

लब्धं परिधिरस्य मूलम् 1000

लब्धं क्षेत्रफलमस्य मूलम् 6250

---

१. वृत्तक्षेत्रव्यासो दशपदगुणितो भवेत् परिक्षेपः।
व्यासचतुर्भागगुणः परिधिः फलमर्धमर्धं तत्।। - गणित सारसंग्रह, क्षेत्रगणित व्यवहार, श्लोक 60

२. वृत्तक्षेत्रे परिधिगुणितव्यासपादः फलं तत्-लीलावती, क्षेत्रव्यवहार श्लोक ४१

सुक्षेमा अनुवाद-किसी वृत्त में 10 विष्कम्भ या व्यास वाला क्षेत्र होने पर उसकी परिधि क्या होगी। हे विद्वन्! अगर जानते हो तो उस वृत्त का क्षेत्रफल भी बताओ।

अनुशीलन-उपरिलिखित नियमानुसार परिधि तथा क्षेत्रफल इस प्रकार है–

परिधि का सूत्र $\sqrt{10 \times \text{व्यास}^2}$

उदाहरण $\sqrt{10 \times 10^2} = \sqrt{1000}$

इस प्रकार 1000 का वर्गमूल ही परिधि है।

क्षेत्रफल का सूत्र $\sqrt{10\left(\frac{\text{व्यास}}{2}\right)^4}$

उदाहरण $\sqrt{10\left(\frac{10}{2}\right)^4}$

$\Rightarrow \sqrt{10 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5} = \sqrt{6250}$

इस प्रकार इस 6250 का वर्गमूल क्षेत्रफल है।

अथामूलदराशेरासन्नमूलानयनम्

राशेरमूलदस्याहतस्य वर्गेण केनचिन्महता।
मूलं शेषेण विना विभजेद् गुणवर्गमूलेन।। 46।।

शतवर्गगुणनादिना लब्धः परिधिः $31\frac{31}{50}$ क्षेत्रफलम् $79\frac{1}{20}$।।

सुक्षेमा अनुवाद-पूर्णांक में वर्गमूल प्रदान न करने वाली राशि का (आसन्न मूल प्राप्त करने के लिये) उस राशि को किसी राशि के बड़े वर्ग से गुणित करके उसका वर्गमूल प्राप्त करें। इसमें पूर्ण वर्गमूल के पश्चात् जो शेष राशि बचे उसे छोड़ दें। अनन्तर पूर्ण वर्गमूल राशि को पूर्व में वर्ग के रूप में गुणित राशि के वर्गमूल से विभाजित करें[१]। इससे उस राशि का आसन्न वर्गमूल प्राप्त होता है।

अनुशीलन-इस श्लोक में पूर्ण वर्गमूल प्रदान न करने वाली राशि का समीपतम वर्गमूल प्राप्त करने की विधि बताई गई है। उपरिलिखित उदाहरण में परिधि तथा क्षेत्रफल की दोनों संख्याओं का वर्गमूल पूर्णांक में नहीं है। अतः इस विधि से इनका आसन्न वर्गमूल ज्ञात करते हैं–

---

१. गृहीतशिष्यतो मूलराशेरमूलदस्य सुव्यक्तमासन्नं मूलं ग्राह्यम्। यथा तस्य राशेः केनचिन्महता वर्गेण हतस्य मूलविधिना मूलं गृहीत्वा शेषं त्यजेत्। प्राप्तं मूलं गुणवर्गमूलेन विभजेत्।–पाटी-गणित टीका श्लोक ११८

$\sqrt{1000}$ ज्ञात करने हेतु उक्त विध्यनुसार $\Rightarrow 1000 \times 100^2 = 10000000$

पुन: $\sqrt{10000000} = 3162$ (अपूर्ण अंक को छोड़ दिया)

$\frac{3162}{100} = 31\frac{72}{100} = 31\frac{31}{50}$ परिधि

$\sqrt{6250}$ के लिये उक्त विध्यनुसार $\Rightarrow 6250 \times 20^2 = 2500000$

$\sqrt{2500000} = 1581$ (अपूर्ण अंक छोड़ कर)

$\frac{1581}{20} = 79\frac{1}{20}$ क्षेत्रफल

आसन्न वर्गमूल प्राप्त करने की इस विधि में जितनी बड़ी राशि के वर्ग से गुणन करते हैं, उतना ही सूक्ष्म, सूक्ष्मतर परिणाम प्राप्त होता है।

चापसूत्रम्

जीवाशरैक्यदलहतशरस्य वर्गं दशाहतं नवभिः।
विभजेदवाप्तमूलं प्रजायते कार्मुकस्य फलम्।। 47।।

सुक्षेमा अनुवाद-जीवा तथा शर को जोड़कर उसके आधे से शर को गुणित करके उसके वर्ग को 10 से गुणित करे तथा 9 से विभाजित करे। पुन: उसका वर्गमूल प्राप्त करे इससे कार्मुक या वृत्त-खण्ड का क्षेत्रफल प्राप्त होता है।

अनुशीलन-श्लोक के नियमानुसार किसी वृत्त-खण्ड या कार्मुक के क्षेत्रफल का सूत्र इस प्रकार होगा-

$$\text{वृत्त-खण्ड का क्षेत्रफल} = \sqrt{\frac{10}{9}\left\{\frac{\text{शर (जीवा + शर)}}{2}\right\}^2}$$

$$\text{अथवा} \Rightarrow \frac{\sqrt{10}}{3} \times \frac{\text{शर (जीवा + शर)}}{2}$$

प्रस्तुत श्लोक में रेखागणित के अनेक पारिभाषिक शब्दों का प्रयोग किया गया है। उनकी परिभाषा इस प्रकार है-

चाप अथवा कार्मुक- यह किसी वृत्त का ऐसा वृत्त-खण्ड है, जिसे कोई जीवा परिसीमित करती है। सामान्यत: लघु-वृत्तखण्ड को यह नाम दिया जाता है। चाप तथा कार्मुक दोनों का मूल अर्थ धनुष है। लघु-वृत्त-खण्ड के धनुष का आकार का बनने से प्राचीन गणित में इसके लिये दोनों नाम सार्थक है।

जीवा- वृत्त के किसी भी बिन्दु से खींची गई सरल रेखा जो अन्त में वृत्त के ही किसी बिन्दु का स्पर्श करती हो, उसे जीवा (chord) कहते हैं।

शर या बाण– जीवा के मध्य बिन्दु से होते हुए वृत्त के किसी बिन्दु को स्पर्श करने वाले लम्ब को शर कहा जाता है।

प्रस्तुत सूत्र में जीवा तथा शर की लम्बाई के आधार पर उससे बनने वाले लघु-वृत्त खण्ड के क्षेत्रफल को जानने का प्रकार बताया गया है।

उदाहरणम्

चापाकृतिनि क्षेत्रे त्रिहस्तबाणे त्रयोदशकरज्ये।
किं भवति फलं विद्वन् गणयित्वा कथय यदि वेत्सि।। 86।।

न्यासः

लब्धः फलवर्गः 640। अस्य मूलं शतवर्गगुणनादिना जातं फलं 25। भागाश्च $\frac{29}{100}$

सुक्षेमा अनुवाद-3 हाथ बाण या लम्ब वाले तथा 13 हाथ ज्या (जीवा) वाले चाप या धनुष के आकार वाले क्षेत्र का क्या फल होगा। हे विद्वन् यदि जानते हो तो गणना करके बताओ।

अनुशीलन-पूर्वोक्त सूत्रानुसार वृत्त-खण्ड का क्षेत्रफल

$$=\sqrt{\frac{10}{9}\left\{\frac{3\,(13+3)}{2}\right\}^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{10\times 24^2}{9}} = \sqrt{\frac{5760}{9}} = \sqrt{640}$$

$$\Rightarrow 25.29 \text{ अथवा } 25\tfrac{29}{100} \text{ हाथ}^2$$

$$\text{अथवा } \sqrt{\frac{10}{3}} \times \frac{3\,(13+3)}{2} \Rightarrow \sqrt{10}\times\tfrac{48}{6} \Rightarrow \sqrt{10}\times 8 \Rightarrow 25.29$$

प्रस्तुत सूत्र वृत्त के क्षेत्रफल द्वारा प्राप्त अर्ध-वृत्त के क्षेत्रफल के आधार पर विकसित किया गया है। क्योंकि–

$$\text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \sqrt{10} \times \frac{\text{व्यास}^2}{4}$$

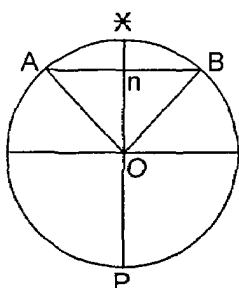
$$\text{अतः अर्धवृत्त का क्षेत्रफल} = \sqrt{\frac{10}{3}} \times \frac{\text{त्रिज्या (व्यास + त्रिज्या)}}{2}$$

यह π $\sqrt{10}$ मानने पर आधुनिक गणित के सर्वथा अनुरूप है-

$$\frac{\sqrt{10}}{3} \times \frac{\text{त्रिज्या (व्यास + त्रिज्या)}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{10}\times 3}{3}\,\frac{\text{त्रिज्या}^2}{2} \Rightarrow \sqrt{10}\times \frac{\text{त्रिज्या}^2}{2}$$

यहां व्यास जीवा के समकक्ष है। क्योंकि व्यास वृत्त की सबसे बड़ी जीवा होती है। साथ ही इस पर खींची गई त्रिज्या शर भी है। अतः अर्धवृत्त के क्षेत्रफल के सूत्र के सन्दर्भ में क्रमशः जीवा और शर को रखने पर भी ठीक वही परिणाम प्राप्त होता है।

श्रीधर ने प्रस्तुत सूत्र में परम्परा के अनुसार इस सूत्र का सामान्यीकरण करते हुए प्रत्येक वृत्त-खण्ड के जीवा तथा शर के लिये यही सूत्र विकसित किया है। यद्यपि अर्धवृत्त में व्यास तथा त्रिज्या तथा इस प्रकार जीवा और शर का जो $1 : \frac{1}{2}$ का अनुपात है, वह अन्य वृत्तखण्डों में लागू नहीं है। अतः अर्धवृत्त के सूत्र को अन्य वृत्तखण्डों के लिये सामान्यीकृत करने पर सर्वथा सही परिणाम प्राप्त नहीं हो सकता। श्रीधर आर्यभट के सूत्र[१] पर समीकरण द्वारा अन्य वृत्त-खण्डों में जीवा तथा शर के सही अनुपात को भली भाँति जानते थे। अतः उन्होंने प्रस्तुत उदाहरण में १३ जीवा के साथ ३ शर का बिल्कुल सही प्रमाण बताया है। फिर भी परम्परानुसार अर्धवृत्त के इस सूत्र को सभी वृत्त-खण्डों के साथ सामान्यीकृत करने पर जीवा और शर के अनुपात के अन्तर की भरपाई के लिये अर्धवृत्त के क्षेत्रफल का बड़ा सूत्र मानते हुए वृत्त-खण्ड के सूत्र को विकसित किया है। इससे महावीर आदि अन्य आचार्यों से अधिक सही मान प्राप्त हो सका है। पर सर्वथा सही नहीं।

आधुनिक गणित में वृत्त-खण्ड का सर्वथा सही क्षेत्रफल प्राप्त करने के लिये पहले त्रिज्या-खण्ड का क्षेत्रफल प्राप्त करते हैं। पश्चात् इस खण्ड में निर्मित त्रिभुज के क्षेत्रफल को घटाकर वृत्त-खण्ड का क्षेत्रफल प्राप्त करते हैं। प्रस्तुत उदाहरण को इस विधि से हल करने के लिये पहले सही नापियों के साथ इस प्रकार चित्रित करते हैं-

AB ⇒ जीवा = 13

x n ⇒ शर = 3

ब्रह्मगुप्त के सूत्र द्वारा प्राप्त-

x p ⇒ व्यास = 17

A O तथा B O त्रिज्या या त्रिभुज का कर्ण = 8.5

n o ⇒ त्रिभुज का लम्ब = 5.5

---

१. वृत्ते शरसंवर्गो अर्धज्यावर्गः स खलु धनुषोः। -आर्यभटीय, गणितपाद श्लोक १७।

त्रिज्या-खण्ड के क्षेत्रफल के लिये वृत्त का व्यास या त्रिज्या को जानना आवश्यक है। प्रस्तुत सूत्र में इसका उल्लेख नहीं है। अतः ब्रह्मगुप्त के सूत्र द्वारा[१] पहले इसे प्राप्त करते हैं–

व्यास $\frac{13^2}{4\times3}+3=17.083$ अतः त्रिज्या $= 8.5416$ .....

यही त्रिज्या इसमें बनने वाले त्रिभुज का कर्ण भी है। अतः शुल्व सूत्र या पाइथोगोरीय सूत्र द्वारा भी इसका यही परिमाप प्राप्त करते हैं–

त्रिभुज का कर्ण $= \sqrt{(6.5)^2 + (5.5416)^2} \Rightarrow \sqrt{42.25+30.710067}$

$\Rightarrow \sqrt{72.960067} \Rightarrow 8.5416$ ....

यहाँ त्रिज्या-खण्ड का कोण सामान्यतः 98^0 है। श्रीधर के अनुसार π का मान सामान्यतः $\frac{31}{10}$ प्राप्त करने पर तथा त्रिज्या को सामान्यतः 8.5 मानने पर–

त्रिज्याखण्ड OA xB का क्षेत्रफल $= \frac{98^0}{360^0} \times \frac{31}{10} \times (8.5)^2$

$\Rightarrow .8438.... \times 72.25 \Rightarrow 60.9705....$

त्रिभुज का लम्ब $= 8.5 - 3$ (शर) $= 5.5$

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{13}{2} \times 5.5 \Rightarrow \frac{71.5}{2} \Rightarrow 35.75$

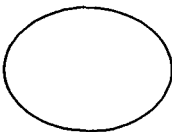
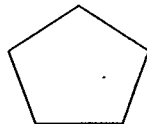
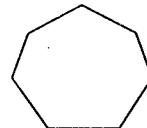
वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल $= 60.9705-35.75 \Rightarrow 25.22$ या $25 \frac{22}{100}$

यह क्षेत्रफल श्रीधर द्वारा प्राप्त परिणाम के उपरिलिखित कारणों से इसका पूरी तरह मिल पाना सम्भव नहीं है।

एतेभ्योऽन्यत्र क्षेत्रेषु चतुरस्रचापवृत्तिपरिकल्पनया स्वकरणैः फलानि साधयेत्। तद्यथा–

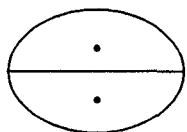
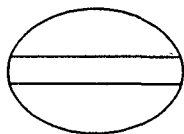
मुरजे चापद्वितयं चतुरस्रं मध्यतो पराकृतिनि।
चापे द्वे त्रिभुजानि तु पञ्चादिभुजेषु कल्प्यन्ते।। 48।।

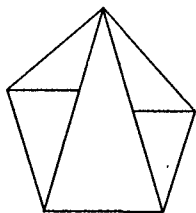
मुरजं चापद्वयाकृति पञ्चभुजम् सप्तभुजम्

१. ज्यावर्गश्चतुराहतशरभक्तः शरयुतो व्यासः। -ब्राह्मस्फुट-सिद्धान्त १२.४१

सुक्षेमा अनुवाद-मुरज नामक वाद्य की आकृति में 2 चाप तथा इसकी ही एक इसकी ही एक अन्य आकृति में मध्य में एक चतुरस्र या चतुर्भुज तथा 2 चाप प्राप्त होते हैं। साथ ही पञ्चभुज, सप्तभुज आदि आकृतियों में अनेक त्रिभुजों की कल्पना की जा सकती है।

अनुशीलन-मुरज की इस आकृति को बीच में एक सरल रेखा द्वारा परिसीमित करने पर 2 चाप प्राप्त होते हैं-

दूसरी एक अन्य आकृति में मध्य में एक चतुर्भुज तथा दो चाप प्राप्त होते हैं-

यहाँ वृत्ताकार जैसी Curvilinear figures के दो अन्य उपभेद बताए हैं। महावीर ने गणितसारसंग्रह 7.32 में प्रथम को 'यवाकार' तथा दूसरी को 'मुरजाकार' नाम दिया है।

पञ्चभुज में किसी कोण से अन्य कोण तक या कोण से आधार तथा रेखाएँ खींच कर 5 त्रिभुज प्राप्त किये जा सकते हैं। जैसे-

इसी प्रकार सप्तभुज से भी 7 त्रिभुज प्राप्त किये जा सकते हैं।

इनमें अलग२ तत्सम्बन्धित सूत्रों को अन्वित करते हुए इनका क्षेत्रफल प्राप्त करना चाहिए।

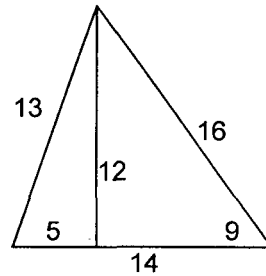
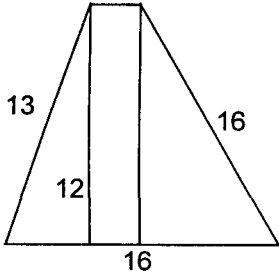
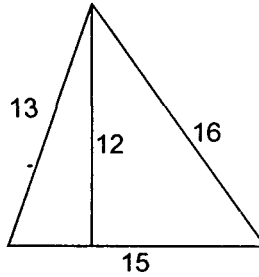
लम्बावधाकर्णपरिज्ञानाय सूत्रमार्या:

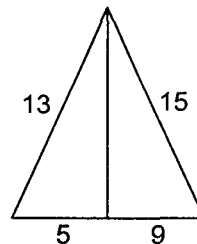
ऋजुवदनचतुर्बाहौ मुखोनभूमिर्धरा भवेत् त्र्यस्त्रे।
तद् बाहू पार्श्वभुजौ प्रकल्पयेन्मध्यलम्बाय।। 49।।

त्र्यस्रस्य फलं द्विगुणं भूभक्तं मध्यलम्बको भवति।
कोटि: स एव बाहुस्त्ववधा कर्णस्तु पार्श्वभुज:।। 50।।

भुजकोट्यो: कृतिहीनात् पृथक्-पृथक् कर्णवर्गतो मूले।
कोटिभुजौ, तत्कृत्योर्युतितो मूलं प्रजायते कर्ण:।। 51।।

पूर्वोक्तक्षेत्रस्य न्यास:

अत्र जातं त्र्यस्रम्।

भुजयुतिदलं चतुर्धेत्यादिना लब्धं त्र्यस्रफलम् 84। अतो लब्धो मध्यलम्ब: 12। एष एव कोटि:। लम्बे निपातिते उभयतोऽबाधे भुजौ। पार्श्वभुजौ कर्णौ। लम्बस्य त्र्यस्रे दर्शनम्।

अत्र कोटि: 12। अस्य कृति: 144

एतां कर्णयोरनयो 13। 15 पृथक् वर्गाभ्यां 169। 225 विशोध्य शेषयोर्मूले भुजोऽवधा च 5। 9 अनयो: क्षेत्रे दर्शनम्।

भुजवर्गोनायाः कर्णकृतेर्मूलं कोटिः। कोटिवर्गोनायाः कर्णकृतेर्मूलं भुजः। भुजकोट्योः कृतियुतेर्मूलं कर्णः। एवमन्यचतुरस्रेषु भुजफलतो लम्बमानयेत्। इति क्षेत्रव्यवहारः।।

सुक्षेमा अनुवाद-समलम्ब चतुर्भुज की भूमि या आधार से मुख रेखा को कम कर देने पर त्रिभुज का आधार प्राप्त होता है। इस त्रिभुज का मध्यलम्ब प्राप्त करने के लिये बाहु को पार्श्वभुजाओं के रूप में प्रकल्पित करना चाहिये।। 49।।

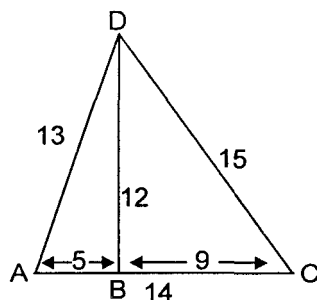
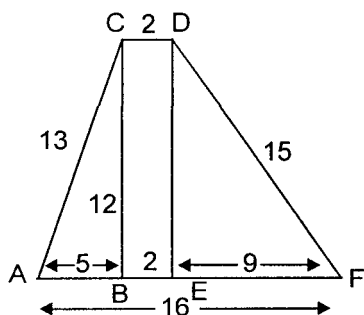
त्रिभुज के क्षेत्रफल को द्विगुणित करके उसे भू या आधार से विभाजित करने पर मध्यलम्ब का मान ज्ञात होता है। इसे ही कोटि कहते हैं। इस कोटि से विभक्त की गई आधार बाहु या भुजा 'अवधा' है। इस कोटि की पार्श्व वाली भुजाएँ कर्ण होती हैं।। 50।।

कर्ण के वर्ग से भुज या आधार की कृति या वर्ग को कम करके उसका वर्गमूल लेने पर कोटि होती है।

कर्ण के वर्ग से कोटि या लम्ब की कृति या वर्ग को कम करके उसका वर्गमूल लेने पर भुज होती है।

भुज और कोटि के वर्ग के योगफल का वर्गमूल ही कर्ण होता है।। 51।।

अनुशीलन-यहाँ पहले पूर्वोक्त समलम्ब चतुर्भुज को उद्धृत करते हुए 1 आयत तथा 2 त्रिभुज दिखाए गए हैं। पश्चात् मुख रेखा को कम करके 2 त्रिभुज प्रस्तुत किये गए हैं। चित्र इस प्रकार है-

चित्र में अंकित संख्याओं से तिगुने मिलीमीटर हैं।

चित्र में त्रिभुज $\triangle$ EDF का कर्ण 15 तथा त्रिभुज $\triangle$ BCA का कर्ण स्पष्टतः 13 है।। 49 ।।

पं. सुधाकर द्विवेदी द्वारा सम्पादित ग्रन्थ में व्याख्या के द्वितीय, तृतीय चित्र में कर्ण का मान 16 तथा सम्पूर्ण भुज या आधार का 15 दिखाया है, जो कि गणित के अनुसार ठीक नहीं है। कर्ण का मान 15 तथा आधार का मान 9+5=14 होना चाहिए। मूल ग्रन्थ में ऐसा ही है। इसे प्रकट करने के लिये 'गणित का इतिहास' ग्रन्थ में उद्धृत तथा जिन एण्ड कम्पनी की अनुमति से डेविड यूजीन स्मिथ कृत History of mathematics से प्रत्युत्पादित मूल ग्रन्थ की छाया प्रति को प्रस्तुत करते हैं। यह प्रस्तुत व्याख्या के 'लब्धो मध्यलम्ब: 12। एष एव कोटि:' इसके आगे लिखी गई है। दूसरी, तीसरी लाइन में कर्ण का मान 15 तथा आधार का मान 14 लिखा है। इस आधार पर हमने अपनी व्याख्या में यही मान उल्लिखित किया है।

श्लोक 50 में त्रिभुज के क्षेत्रफल द्वारा इसके शीर्षलम्ब ज्ञात करने की विधि बताई गई है। यह विधि श्लोक 43 में उल्लिखित 'कुदलं च लम्बहतम्' सूत्र में त्रिभुज के क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधि पर समीकरण के प्रयोग से प्रकट है–

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{\text{आधार} \times \text{शीर्षलम्ब}}{2}$$

$$\text{त्रिभुज का शीर्षलम्ब} = \frac{2 \times \text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$$

स्पष्टत: श्लोक 50 में शीर्षलम्ब की यही विधि उल्लिखित है।

उदाहरण के लिये द्वितीय चित्र के △ ADF त्रिभुज का श्लोक 43 के 'भुजयुतिदलं चतुर्धा...' की विधि से पहले क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं–

द्वितीय चित्र में ADF का क्षेत्रफल $= \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = \sqrt{7056} = 84$

अब प्रस्तुत श्लोक 50 की विधि से इसका शीर्षलम्ब–

ADF का शीर्षलम्ब $= \frac{2 \times 84}{14} = \frac{168}{14} = 12$

इस लम्ब को यहाँ कोटि कहा गया है। इस कोटि से विभक्त की गई आधार भुजा→5 मात्रा के AB तथा 9 मात्रा के EF को यहाँ 'अवधा' कहा गया है। साथ ही ADB त्रिभुज की पार्श्व भुजा AD 13 मात्रा का कर्ण है। तथा BDF त्रिभुज की पार्श्वभुजा F D 15 मात्रा का कर्ण है।

आगे 51वें सूत्र में त्रिभुज की भुजाओं में सहसम्बन्ध प्रकट करते हुए इनके परिमाण के सूत्र बताए हैं। तदनुसार–

कोटि या लम्ब $= \sqrt{\text{कर्ण}^2 - \text{भुज}^2 \text{ या आधार}^2}$

भुज या आधार $= \sqrt{\text{कर्ण}^2 - \text{कोटि}^2 \text{ या लम्ब}^2}$

कर्ण $= \sqrt{\text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2}$

यहां कर्ण के सूत्र को उपरिलिखित उदाहरण में अन्वित करने पर इसका मान क्रमश: 13 तथा 15 प्राप्त होता है–

ADB का कर्ण $= \sqrt{12^2+5^2} \Rightarrow \sqrt{144+25} \Rightarrow \sqrt{169} = 13$

BDF का कर्ण $= \sqrt{12^2+9^2} \Rightarrow \sqrt{144+81} \Rightarrow \sqrt{225} = 15$

इन कर्ण, कोटि, आधार में से किन्हीं दो के परिज्ञान होने पर समीकरण द्वारा तीसरे का आसानी से पता लगाया जा सकता है। अत: व्याख्या में कर्ण के वर्ग से लम्ब के वर्ग को घटाकर वर्गमूल लेकर दोनों त्रिभुजों की अलग२ आधार भुज या अवधा ज्ञात की गई है–

$$\sqrt{13^2+12^2} \Rightarrow \sqrt{169+144} \Rightarrow \sqrt{25} = 5$$

अथवा $\sqrt{15^2+12^2} \Rightarrow \sqrt{225+144} \Rightarrow \sqrt{81} = 9$

यहाँ इसका स्पष्ट निरूपण बहुत आवश्यक है कि यह नियम केवल समकोण त्रिभुज में लागू होता है।

इस प्रकार इस सूत्र से हमें आधार, लम्ब तथा कर्ण वाले त्रिक प्राप्त होते हैं–

9 - 12 - 15

5 - 12 - 13

यह सूत्र सर्वव्यापी है। अत: इन संख्याओं के अनुपात में आने वाली किसी भी त्रिक में यह सूत्र लागू होता है। इस प्रकार किसी भी समकोण त्रिभुज में वे संख्याएँ होती हैं, जो उपरिलिखित त्रिक के अनुपात में होती हैं। अथवा विलोमत:, इन संख्याओं के अनुपात में आने वाला कोई भी त्रिक समकोण त्रिभुज का निर्माण करता है। अत: ये सभी त्रिक इसके लिये सत्य हैं। उदाहरणत:–

9 -12 -15 त्रिक का–

$\frac{1}{2}$ गुना $\Rightarrow$ 4.5 . 6 . 7.5 क्योंकि $\sqrt{20.25 + 36} = 7.5$

$\frac{1}{3}$,, $\Rightarrow$ 3 . 4 . 5 ,, $\sqrt{9 + 16} = 5$

$\frac{1}{4}$,, $\Rightarrow$ 2.25. 3 . 3.75 ,, $\sqrt{5.0625 + 9} = 3.75$

5.12.13 का त्रिक का–

$\frac{1}{2}$,, $\Rightarrow$ 2.5 . 6 . 6.5 ,, $\sqrt{6.25 + 36} = 6.5$

$\frac{1}{4}$,, $\Rightarrow$ 1.25. 3 . 3.25 ,, $\sqrt{1.5625 + 9} = 3.25$

इस प्रकार किसी भी त्रिक से समानुपातिक गुणा या भाग द्वारा अनन्त त्रिक प्राप्त किये जा सकते हैं। इनके सर्वप्रथम अनेक उदाहरण 500 B.C. या इससे भी पूर्व निर्मित बौधायन शुल्ब सूत्र आदि में प्राप्त होते हैं। इसमें उपरिलिखित द्वितीय त्रिक का स्पष्ट उल्लेख है[१]। इसका इस प्रकार नाम दे सकते हैं–

a b c

5 12 13

इस त्रिक की एक विशेषता यह है कि इसके b तथा c का जोड़ तथा घटाव दोनों किसी पूर्ण संख्या के वर्ग बनते हैं तथा इनका वर्गमूल कोई विषम संख्या होती है तथा इन विषम संख्याओं का गुणनफल a संख्या होती है। इस समीकरण को सिद्ध करने पर सार्वत्रिक परिणाम प्राप्त होता है कि यदि a किन्हीं दो विषम संख्याओं (m n) का गुणनफल हो, या a = m n हो तो–

$$b = \frac{m^2 - n^2}{2} \quad \text{तथा} \quad c = \frac{m^2 + n^2}{2}$$

---

१. तासां त्रिकचतुष्कयोर्द्वादशपञ्चिकयो: ......इत्येतासूपलब्धि:। – बौ.शु.सू. 1.49

उदाहरणार्थ–

$a \Rightarrow 7 \times 5 = 35,$ $b \Rightarrow \frac{49 - 25}{2} = 12$

$c \Rightarrow \frac{49 + 25}{2} = 37$

अथवा

$a \Rightarrow 9 \times 3 = 27,$ $b \Rightarrow \frac{81 - 9}{2} = 36$

$c \Rightarrow \frac{81 + 9}{2} = 45$

उपरिलिखित त्रिक में भी यह नियम लागू है–

$a \Rightarrow 5 \times 1 = 5$ $b \Rightarrow \frac{25 - 1}{2} = 12$

$c \Rightarrow \frac{25 + 1}{2} = 13$

इस बढ़िया नियम के अनुसार किसी भी विषम संख्या के a होने पर त्रिक प्राप्त किये जा सकते हैं।

श्लोक ५१ की व्याख्या के आधार पर भुज का सूत्र इस प्रकार है–

कोटिवर्गोनायाः कर्णकृतेर्मूलं भुजः।

अर्थ पूर्वोक्त है। यह कर्ण पर समीकरण से प्राप्त है–

$\sqrt{\text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2} = \text{कर्ण}$

$\Rightarrow \sqrt{\text{कर्ण}^2 - \text{लम्ब}^2} = \text{आधार या भुज}$

कोटि या लम्ब का सूत्र इस प्रकार है–

भुजवर्गोनायाः कर्णकृतेर्मूलं कोटिः।

यह भी कर्ण पर समीकरण अनुसार प्राप्त है। इस प्रकार–

$\sqrt{\text{कर्ण}^2 - \text{आधार}^2} = \text{लम्ब}$

पूर्वोक्त समकोण त्रिभुज के उदाहरणों में–

$\sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ लम्ब

इसी प्रकार–

$\sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$ लम्ब

श्रीधराचार्य ने त्रिभुज की भुजाओं में सहसम्बन्ध तथा प्रमाण को प्रकट करने वाला यह सूत्र मूलतः ब्रह्मगुप्त से प्राप्त किया है–

कर्णकृतेः कोटिकृतिर्विशोध्य मूलं भुजो, भुजस्य कृतिम्।
प्रोह्य पदं कोटिः, कोटिबाहुकृतियुतिपदं कर्णः।।

–ब्राह्मस्फुट सिद्धान्त १२.२४

स्पष्टतः श्रीधर के भाव तथा भाषा भी इसके समान है। आधुनिक गणित में इसे पाइथोगोरस प्रमेय कहने की परम्परा है। पर यह उल्लेख बहुत जरूरी है कि पाइथोगोरस से भी पहले ईसा पूर्व ५वीं शताब्दी या इससे भी पूर्व निर्मित बौधायन शुल्व सूत्र में इस प्रमेय को किसी आयत में वर्ग के माध्यम से प्रकट किया गया था–

दीर्घचतुरस्रस्याक्ष्णया रज्जुः पार्श्वमानी तिर्यङ्मानी
च यत् पृथग्भूते कुरुतस्तदुभयं करोति।–बौधायन शु.सू. १.४८

अर्थात् किसी आयत की भुजाएँ जितने अलग२ प्रमाण का वर्ग बनाती हैं, उन पर खींचा गया विकर्ण उनके योगफल जितना वर्ग क्षेत्रफल बनाता है। इस प्रकार–

क्योंकि विकर्ण पर वर्ग $= a^2 + b^2$

अतः उस वर्ग की विकर्ण नामक एक भुजा $= \sqrt{a^2 + b^2}$

शुल्ब सूत्रों में इस उपाय से कर्ण के प्रमाण को जानने का सफल प्रयास किया गया था।

खातव्यवहारे करणसूत्रम्

मुखतलमध्ये पृथुतादैर्घ्ये वा चेत् प्रजायते विषमम्।
वेधे वा विषमयुतिं साम्याय भजेत् विषमपदैः।। 52।।

समविस्तरहतदैर्घ्ये वेधेन समाहते फलं भवति।
खाते समभुजवेधे बाहुघनो जायते गणितम्।। 53।।

सुक्षेमा अनुवाद-मुख, तल तथा मध्य में पृथुता = चौड़ाई, दैर्घ्य = लम्बाई या वेध = गहराई के विषम होने पर विषम खात होता है। उसे समखात बनाने के लिये उन विषम संख्याओं को जोड़कर उन्हें विषम संख्या के पद से विभाजित करना चाहिए। (इससे औसत मान प्राप्त होता है।)।। 52।।

विस्तर = चौड़ाई, दैर्घ्य = लम्बाई तथा वेध = गहराई के सम होने पर तीनों को परस्पर गुणित करने पर घनफल प्राप्त होता है तथा ऐसा कोई खात या गहरा

पात्र जिसकी तीनों भुजाएँ समान हों, उसमें इस संक्रिया से गणित या उसका आयतन ज्ञात होता है। 153।।

अनुशीलन-इन श्लोकों में घन तथा घनाभ के आयतन को ज्ञात करने की विधि बताई गई है। 53 वें श्लोक के अनुसार जिस पिण्ड की लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई वाली तीनों भुजाएँ परस्पर समान परिमाण की हों वह घन होता है। इन तीनों का गुणनफल ही घनफल अथवा आयतन है। इन तीनों की भुजा समान होने से किसी भी भुजा का घन उसका आयतन होगा। अत:-

घन का आयतन = कोई भी भुजा^{3}

52 वें श्लोक के अनुसार घनाभ अर्थात् जिसकी तीनों विमाएँ ⇒ लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई समान न हों, उनके आयतन को ज्ञात करने के लिये उन तीनों का गुणन करना चाहिये। अत:-

घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × गहराई

इस श्लोक में यह भी कहा है कि जिस पिण्ड की लम्बाई या चौड़ाई या गहराई की सम्पाती भुजाएँ परस्पर समानान्तर न हों, उसे असमखात कहते हैं। इनका औसत निकाल कर पहले सम खात बना लेना चाहिये। उसके पश्चात् उक्त सूत्र का प्रयोग करके उस घनाभ का आयतन ज्ञात करना चाहिये।

उदाहरणम्

द्वित्रिचतुष्करवेधा पुष्करिणी पञ्च हस्तविस्तारा।
षोडशहस्तायामा खातफलं कथ्यतामाशु।। 87।।

न्यास: 2। 3। 4।। 5।। 16।। लब्धं विषमफलम् 240

सुक्षेमा अनुवाद-कोई पुष्करिणी या बावली कहीं पर 2 कहीं 3 तथा कहीं 4 हाथ वेध या गहरी है। यह 5 हाथ विस्तार या चौड़ाई वाली तथा 16 हाथ आयाम या लम्बाई वाली है। इसके खातफल या घन फल को शीघ्र बताओ।

अनुशीलन-यहाँ इसकी गहराई समान नहीं है। अत: 52 वें श्लोक के अनुसार इसका औसत निकालते हैं। इसका नियम है कि सभी संख्याओं को जोड़ दें। पुन: उसे उन संख्याओं के जितने नम्बर हैं, उनसे भाग दे दें। पश्चात् प्रत्येक को आपस में गुणित करें। अत:-

$$\left(\frac{2+3+4}{3}\right) \times 5 \times 16 = 3 \times 5 \times 16 = 240$$

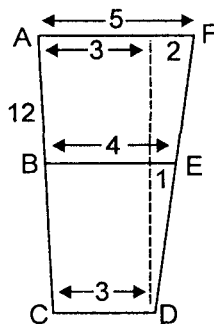
इस औसत से स्थूल घनफल ज्ञात होता है। क्योंकि अलग-अलग गहराई का क्षेत्रफल सुनिश्चित नहीं है। स्पष्टतः अलग-अलग क्षेत्रफलों को गहराई से गुणित करने पर अलग-अलग परिणाम प्राप्त होगा। सर्वथा सही घनफल के लिये अलग-अलग गहराई वाले घनाभ का अलग-अलग आयतन प्राप्त करके उन तीनों का जोड़ करना होगा।

अन्यदुदाहरणम्

त्रिचतुःपञ्चकहस्ताः पृथुता विषमात् तु यस्य खातस्य।
अष्टौ हस्ता वेधो द्वादश दैर्घ्ये कथय फलम्।। 88।।

न्यासः।। 3। 4। 5।। 8 दैर्घ्यं 12 खाते लब्धं फलम् 384

सुक्षेमा अनुवाद-जो खात या गहरा पिण्ड पृथुता या चौड़ाई में कहीं 3, कहीं 4 तथा कहीं 5 हाथ वाला है। वह दैर्घ्य या लम्बाई में 12 हाथ है तथा 8 हाथ गहरा है। उस घन का फल या आयतन क्या होगा।

अनुशीलन-इस हौज का केवल लम्बाई, चौड़ाई का चित्र इस प्रकार होगा–

नापियाँ निर्दिष्ट संख्याओं का $\frac{1}{2}$ सेंटीमीटर हैं।

यहाँ $CD \rightarrow 3, BE \rightarrow 4$, तथा AF की चौड़ाई 5 हाथ है। अतः उपर्युक्त संक्रिया अनुसार औसत निकालते हुए–

$$\left(\frac{3+4+5}{3}\right) \times 12 \times 8 \quad = \quad 4 \times 12 \times 8 = 384$$

यहाँ बिन्दु अंकित रेखाओं द्वारा समकोण त्रिभुज प्राप्त किया गया है। इससे हम एक घनाभ तथा एक त्रिभुज प्राप्त करते हैं। इन दोनों के अलग-अलग आयतन को जोड़कर भी हम वही परिणाम पाते हैं–

घनाभ का आयतन $\Rightarrow 12 \times 3 \times 8 \quad = \quad 288$

त्रिभुजाकार गड्ढे का आयतन $\Rightarrow 6 \times 2 \times 8 = \quad 96$

सम्पूर्ण हौज का आयतन $\quad 384$

अन्यदुदाहरणम्

समविस्तारकरा दशपादयुता गणक यस्य खातस्य।
दैर्घ्ये षोडश सार्धा वेधोऽष्टौ तत्र किं गणितम्।। 89।।

न्यासः $\frac{41}{4}$ $\frac{33}{2}$ $\frac{8}{1}$ गणितहस्ताः 1353

सुक्षेमा अनुवाद-हे गणितज्ञ, जिस खात के हाथ समान विस्तार वाले हैं, उसकी चौड़ाई $\frac{1}{4}$ सहित 10 अर्थात् $\frac{41}{4}$ तथा लम्बाई $\frac{1}{2}$ सहित 16 अर्थात् $\frac{33}{2}$ है तथा वेध या गहराई 8 हाथ है। उसका कितना 'गणित' या आयतन होगा।

अनुशीलन-यह समखात का उदाहरण है। इसमें घनाभ के सामान्य सूत्र के अनुसार–

$$\frac{41}{4} \times \frac{33}{2} \times \frac{8}{1} = \frac{10824}{8} = 1353 \text{ हाथ}^3$$

अन्यदुदाहरणम्

समचतुरस्रे खाते षोडश हस्ता भुजा सखे यत्र।
वेधोऽपि षोडशैव प्रकथ्यतां तत्र किं गणितम्।।

न्यासः 16। 16। 16।। लब्धं 4096।।

सुक्षेमा अनुवाद-सम चतुर्भुज खात में जिसकी लम्बी तथा चौड़ी भुजा 16-16 हाथ की है जिसकी गहराई भी 16 है। हे मित्र, उसका आयतन क्या होगा, बताओ।

अनुशीलन-यह घन के आयतन का उदाहरण है। यहाँ 53 वें श्लोक के नियमानुसार–

हौज का आयतन $\Rightarrow 16^3$ अथवा $16 \times 16 \times 16 = 4096$ घन हस्त

कूपस्य फले सूत्रम्

मुखतलतद्योगानां वर्गैक्यकृतेः पदं दशगुणायाः।
वेधगुणं चतुरन्वितविंशतिभक्तं फलं कूपे।। 54।।

सुक्षेमा अनुवाद-मुख के व्यास का वर्ग, तल के व्यास का वर्ग तथा इन दोनों के व्यास का वर्ग–इन्हें परस्पर संयुक्त करके इनका वर्ग प्राप्त करें तथा 10 से गुणित करें। इस सम्पूर्ण का वर्गमूल प्राप्त करें। इसे इसकी ऊँचाई से गुणित करें तथा 24 से विभाजित करें। इससे कूप का घनफल प्राप्त होता है।

अनुशीलन-इस सूत्र में विषम खात कूप अथवा अपूर्ण शंकु के आयतन (volume of frustrum of a cone) का सूत्र प्रदान किया गया है।

श्लोक में उल्लिखित संक्रियाओं से इसके लिये हमें यह सूत्र प्राप्त होता है–

$$\text{अपूर्ण शंकु का आयतन} = \frac{\text{ऊँचाई}}{24}\sqrt{10\,\{\text{व्यास}^2_1 + \text{व्यास}^2_2 + (\text{व्यास}_1 + \text{व्यास}_2)^2\}^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{10} \times \frac{\text{ऊँचाई}}{24}\ \{\text{व्यास}^2_1 + \text{व्यास}^2_2 + (\text{व्यास}_1 + \text{व्यास}_2)^2\}$$

इसे इस प्रकार भी लिख सकते हैं–

$$\frac{\text{ऊँचाई}}{6}\left\{\left(\frac{\sqrt{10} \times \text{व्यास}^2_1}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{10} \times \text{व्यास}^2_2}{4}\right) + \frac{\{\sqrt{10}\ (\text{व्यास}_1 + \text{व्यास}_2)^2\}}{4}\right.$$

इस सूत्र के कोष्ठक का प्रत्येक उपबन्ध 'वृत्त के क्षेत्रफल' के समकक्ष है। अत: इस सूत्र को इस प्रकार भी लिख सकते हैं–

$$\text{विषमखात कूप या अपूर्ण शंकु का आयतन} = \frac{(\text{मुखज क्षेत्रफल} + \text{तलज क्षेत्रफल} + \text{युतिज क्षेत्रफल})\ \text{ऊँचाई}}{6}$$

भास्कराचार्य ने इस रूप में सूत्र को स्वीकार करते हुए इसका उपयोग विषमखात घनाभ के आयतन (Volume of frustrum of a pyramid) को जानने के लिये किया है।[1] जिस पिण्ड का आधार आयत हो तथा ऊपर क्रमश: सूच्याकार हो वह पिरामिड है। जो आधार वृत्ताकार रखते हुए क्रमश: सूच्याकार को धारण करे वह शंकु है।

त्रिशतिकाकार ने आगे श्लोक 61 में ऐसे पूर्ण शंकु के आयतन के लिये सूत्र प्रस्तुत किया है। उसके अनुसार–

$$\text{पूर्ण शंकु का आयतन} = \frac{\pi \times \text{व्यास}^2 \times \text{ऊँचाई}}{4 \times 3}$$

---

१. मुखजतलजतद्युतिजक्षेत्रफलैक्यं हृतं षड्भिः।
क्षेत्रफलं सममेवं वेधहतं घनफलं स्पष्टम्।। लीलावती, खातव्यवहार श्लोक 2-3

इसे इस प्रकार भी प्रकट कर सकते हैं–

पूर्ण शंकु का आयतन $= \frac{1}{3} \times$ वृत्त का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई।

पर आलोच्य प्रसंग में अपूर्ण शंकु वाले कूप का आयतन ज्ञात करना है। वह कूप ऊपर वृत्ताकार है। वह धीरे-धीरे तिरछी गहराई (slant depth) वाला होता गया है। पर वह अन्त में सूच्याकार नहीं बना है। अतः वहाँ तक गहराई नहीं, अपितु छोटे वृत्त या तलज वृत्त तक का ही आयतन ज्ञात करना है। ऐसी दशा में श्रीधराचार्य ने इस अपूर्ण शंकु के अलग-2 स्थानों के वृत्त के क्षेत्रफल को जोड़ कर तथा ६ से विभाजित करके इसका औसत क्षेत्रफल ज्ञात किया है। भास्कराचार्य ने भी इस संक्रिया का उद्देश्य औसत क्षेत्रफल ज्ञात करना बताया है। (क्षेत्रफलं सममेवम् - लीलावती, खातव्यवहार श्लोक 3) पुनः त्रिशतिका श्लोक सूत्र 57 के अनुसार इस क्षेत्रफल को ऊँचाई से गुणा करके इसका आयतन ज्ञात किया गया है।

इस सूत्र को समन्वित करने के लिए उदाहरण इस प्रकार है–

उदाहरणम्

कूपस्य मुखव्यासः षोडश हस्तास्तले च चत्वारः।
वेधो द्वादश विद्वन् तत् खातफलं समाचक्ष्व।। 91।।

अमूलराशेः शतवर्गगुणनादिना लब्धं खातफलं हस्ताः $1062\frac{21}{40}$ त्र्यस्रवृत्तादिखातेषु प्राग्वत् क्षेत्रफलानि साधयेत्।

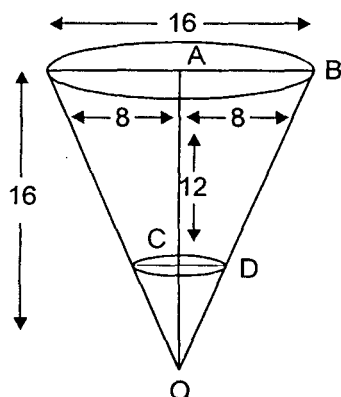
सुक्षेमा अनुवाद-किसी कूप के मुख का व्यास 16 हाथ तथा तल का व्यास 4 हाथ है। इसकी वेध या ऊँचाई 12 हाथ है। हे विद्वन्, ऐसे कूप का खातफल या आयतन बताओ।

प्रस्तुत उदाहरण में सूत्रानुसार संक्रियाएँ करने पर–

अपूर्ण शंकु का आयतन या कूप का खातफल =

$\sqrt{10} \times \frac{12}{24})$ $(256 + 16 + 400)$

$\Rightarrow \frac{25500.60705}{24} \Rightarrow 1062.525$ या $1062\ \frac{525}{1000}\ \frac{\div 25}{\div 25} = 1062\frac{21}{40}$

आधुनिक गणित में इस अपूर्ण शंकु का आयतन ज्ञात करने के लिए पहले इसे पूर्ण शंकु का आकार प्रदान करते हैं, जो इस प्रकार है–

नापियाँ उल्लिखित संख्याओं का $\frac{1}{4}$ सेंटीमीटर हैं।

त्रिशतिकाकार ने अपूर्ण शंकु की ऊँचाई 12 हाथ बताई है। उपरिलिखित चित्र के अनुसार इसे पूर्ण शंकु का रूप देने पर इसकी ऊँचाई अवश्य ही 16 होगी। यह समरूप त्रिभुज के इस समीकरण से भी प्रकट है–

$\triangle OAB$ तथा $\triangle OCD$ समरूप हैं। अतः–

$$\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} \rightarrow \frac{x+12}{x} = \frac{8}{2} \text{ या } 4$$

$$\Rightarrow 4x = x + 12$$

$$\Rightarrow 4x - x = 12$$

$$\Rightarrow 3x = 12$$

$$\Rightarrow x = \frac{12}{3} = 4$$

इस प्रकार CO की ऊँचाई 4 हाथ है। उल्लिखितानुसार AC की ऊँचाई 12 है। अतः कुल ऊँचाई 16 हाथ है। इसमें शंकु के समकक्ष सूत्र को समन्वित करते हुए तथा उसमें से OC से बनने वाले आकार को घटाते हुए–

$$\frac{1}{3} \times \frac{3162}{1000} (r_1^2 h_1 - r_2^2 h_2) \rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{3162}{1000} (8^2 \times 16 - 2^2 \times 4)$$

$$\Rightarrow \frac{3162}{3000} \times (11024 - 16)$$

$$\Rightarrow 1.054 \times 1008 = 1062.432$$

$$\text{अथवा } 1062\tfrac{54}{125}$$

इस प्रकार हमने आधुनिक रीति से पूर्णांक में वही परिणाम प्राप्त कर लिया है, जिसका त्रिशतिकाकार ने उल्लेख किया है।

इसकी व्याख्या में कहा है कि त्रिभुज तथा वृत्त के क्षेत्रफल भी इसी उपाय से प्राप्त करना चाहिये। अतः इस श्लोक से संकेतित सूत्र ऊपर लिख दिये गए हैं।

पाषाणफलानयने सूत्रम्

दैर्घ्यांगुलानि विस्तृतिपिण्डांगुलताडितानि विभजेत्।
द्विकृतिचतुरेकषड्भिर्भवन्ति पाषाणफलहस्ताः।। 55।।

सुक्षेमा अनुवाद-किसी पिण्ड या पाषाण के लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई द्वारा अंगुल में प्राप्त घनफल को 2 की कृति या वर्ग, चार, एक तथा छह से प्राप्त संख्या अर्थात् 6144 से विभाजित करने पर उसका 'पाषाणफल-हस्त' प्राप्त होता है।

अनुशीलन-त्रिशतिकाकार के समय में 'अंकानां वामतो गतिः' इस नियम के अनुसार अंकों को दाहिने से बाईं ओर पढ़ा जाता था। अतः सबसे पहले इकाई की संख्या $2^2=4$, पुनः दहाई की संख्या→4 इस क्रम से पढ़ने पर 6144 संख्या प्राप्त होती है। उनके समय में 32 अंगुल लम्बा, 24 अंगुल चौड़ा तथा 8 अंगुल गहरा तथा इस प्रकार $32\times24\times8=6144$ घन अंगुल पाषाण-पिण्ड का 1 'पाषाण-फल-हस्त' यह मानक परिमाण माना गया था[१]। अतः इस श्लोक में किसी भी पाषाण-पिण्ड के घन अंगुल में प्राप्त परिमाण को 6144 से विभाजित करके 'पाषाण-फल-हस्त' इस मानक मान को जानने की विधि बताई गई है।

उदाहरणम्

सार्धत्रिकरव्यासा करार्धपिण्डा शिला सखे तस्याः।
आयामः पञ्च करास्त्रिभागयुक्ताः फलं किं स्यात्।। 92।।

हस्तैरंगुलीकृतैर्न्यासः 84, 12, 128 लब्धं पाषाणहस्ताः 21

सुक्षेमा अनुवाद-हे मित्र, जिस शिला की लम्बाई $\frac{7}{2}$ हाथ, ऊँचाई $\frac{1}{2}$ हाथ तथा चौड़ाई $5\frac{1}{3}$ या $\frac{16}{3}$ हैं, उसका घनफल क्या होगा।

अनुशीलन-24 अंगुल का 1 हस्त होता है। अतः व्याख्या के अनुसार इन नापियों को 24 से गुणित करके अंगुल में बदल लेते हैं। इसके अनुसार शिला के क्रमशः 84, 12 तथा 128 अंगुल परिमाण प्राप्त होते हैं। अतः–

$84 \times 12 \times 128$ = 129024 घन अंगुल या अंगुल^3

$129024 \div 6144$ = 21 'पाषाण फल हस्त'

---

१. यस्य पाषाणस्य विस्तृतिरंगुलचतुर्विंशतिः, दैर्घ्यमंगुलद्वात्रिंशत् पिण्डमितिश्चाष्टांगुलानि तदेव पाषाणघनहस्ताख्यं प्रकल्पितमाचार्येणेतीह बोध्यम् - म.म.पं. सुधाकर चतुर्वेदमहाभागानां टिप्पणी।

यहाँ यह उल्लेखनीय है कि 'पाषाण-फल-हस्त' यह एक पारिभाषिक मानक मात्रक है, जो कि घन-हस्त से सर्वथा भिन्न है। प्रस्तुत उदाहरण में $\frac{7}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{16}{3} = \frac{112}{12} = 9.3.....$ घन-हस्त प्राप्त होते हैं। उपरिलिखित विधि से इसके 21 पाषाणफलहस्त सिद्ध होते हैं।

गोल-पाषाणस्य करण-सूत्रम्

गोलव्यासघनार्धं स्वाष्टादशभागसंयुतं गणितम्।
घनहस्ता नवगुणिताश्चतुर्विभक्ता करा दृषदः।। 56।।

सुक्षेमा अनुवाद-गोल पिण्ड के व्यास के घन के आधे को 'स्व' अर्थात् उसके ही 18 वें भाग से संयुक्त करने पर गोले का घनफल या आयतन प्राप्त होता है। इस प्रकार प्राप्त घनहस्त या घनफल को 9 से गुणित करके 4 से विभक्त करने पर पाषाण फलहस्त प्राप्त होता है।

अनुशीलन-श्लोक के अनुसार किसी गोल पिण्ड के घनफल या आयतन का सूत्र इस प्रकार है-

गोल पिण्ड का आयतन $= \frac{\text{व्यास}^3}{2} + \frac{\text{व्यास}^3}{2 \times 18}$

$\Rightarrow (\frac{1}{2} + \frac{1}{36})$ व्यास^3 $\Rightarrow \frac{19}{36} \times$ व्यास^3

$\pi = \sqrt{10} = \frac{19}{6} = 3.16$ का अलग उल्लेख करने पर-

गोल पिण्ड का आयतन $= \frac{3.16 \times \text{व्यास}^3}{6}$

$\Rightarrow \frac{1}{6} \times 3.16 \times 8$ त्रिज्या^{3}, $\Rightarrow \frac{4}{3} \times 3.16$ त्रिज्या^{3}

यह सूत्र आधुनिक गणित के π के मान को छोड़ कर सर्वथा समतुल्य है।

यहाँ श्रीधर के सूत्र को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है-

गोले का आयतन $= \frac{4 \times 3.16 \times \text{त्रिज्या}^2 \times \text{व्यास}}{6}$

$4 \times 3.16 \times$ त्रिज्या^{2} यह गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल का सूत्र है।

अत: भास्कराचार्य ने गोले के आयतन का यह सूत्र प्रदान किया है[१]-

---

१. गोलस्यैवं तदपि च फलं पृष्ठजं व्यासनिघ्नम्।
षड्भिर्भक्तं भवति नियतं गोलगर्भे घनाख्यम्।। -लीलावती, क्षेत्रव्यवहार, श्लोक ४१

गोल पिण्ड का आयतन $= \frac{\text{गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल} \times \text{व्यास}}{6}$

पूर्वोक्त श्लोक 55 में कहा है कि $32 \times 24 \times 8 = 6144$ घन अंगुल = 1 पाषाण हस्त। इन अंगुल संख्याओं को 24 से विभाजित करके हस्त संख्याओं में यह भी कह सकते हैं कि $\frac{4}{3} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$ घन हस्त = 1 पाषाणफलहस्त। यहाँ श्रीधर ने इस पैमाने को मानते हुए किसी पाषाण-पिण्ड के घन हस्त में प्राप्त परिमाण को $\frac{4}{9}$ से विभाजित करके अर्थात् $\frac{9}{4}$ से गुणित करके पाषाण-फल हस्त प्राप्त करने का निर्देश दिया है।

उदाहरणम्

गोले पाषाणमये घनफलमध्यर्धविस्तारे।
गणयित्वा कथय ततः पाषाणफलं हि यदि वेत्सि।। 93।।

न्यासः $\frac{3}{2}$ लब्धं घनहस्ताः $1\frac{25}{32}$ अतः पाषाणफलहस्ताः 4। अंगुलभागाः $\frac{3}{16}$।।

सुक्षेमा अनुवाद-कोई गोल पाषाण, जिसका व्यास $1\frac{1}{2}$ या $\frac{3}{2}$ तक विस्तृत है, उसका घनफल या आयतन गणना करके बताओ, यदि जानते हो।

अनुशीलन-यहाँ श्लोक से प्राप्त सूत्र के अनुसार-

$$\frac{19}{36} \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{513 \div 9}{288 \div 9} = \frac{57}{32} = 1\frac{25}{32}$$

घन हस्त या गोल पाषाण का आयतन

इसका पाषाणफल हस्त प्राप्त करने के लिये पूर्वोक्त संक्रिया करने पर

$\frac{57}{32} \times \frac{9}{4} = \frac{513}{128} = 4\frac{1}{128}$ पाषाण फल हस्त

श्लोक 55 में पाषाणफलहस्त बनाने की विधि द्वारा भी हम यही परिणाम प्राप्त करते हैं-

$\frac{3}{2} \times 24 = 36$

$\frac{19}{36} \times 36^3 = 24624$

$\frac{24624 \div 12}{6144 \div 12} = \frac{2052}{512} = 4\frac{1}{128}$ पाषाण फल हस्त

उदा-श्लोक 92 में कहे उदाहरण को इस विधि से हल करने पर भी हम पूर्वोक्त परिणाम प्राप्त करते हैं-

$\frac{7}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{16}{3} \times \frac{9}{4} = 21$ पाषाण फल हस्त

करणसूत्रम्

प्राग्वत् क्षेत्रस्य फलं वृत्तत्र्यस्त्रादिदृषदि पिण्डघ्नम्।
घनगणितमतो दृषदः फलं भवेत् पूर्वकरणेन।। 57।।

सुक्षेमा अनुवाद-वृत्त तथा त्र्यस्र या त्रिभुज का क्षेत्रफल पूर्वोक्त के समान होता है। इस क्षेत्रफल में पिण्ड की ऊँचाई से पूर्वोक्त रीति से गुणन करने पर दृषत् या प्रस्तर पिण्ड का घन गणित अथवा उसका आयतन प्राप्त होता है।

अनुशीलन-पूर्वोक्त श्लोक 43 में त्रिभुज का क्षेत्रफल तथा श्लोक 45 में वृत्त के क्षेत्रफल की विधि बताई जा चुकी है। इसमें केवल ऊँचाई को गुणित करने पर घन का या लम्ब वृत्तीय बेलन आकार के पिण्ड का घनफल का यह सूत्र होगा-

पिण्ड का आयतन = आधार (वृत्त, त्रिभुज, चतुर्भुज आदि) का क्षेत्रफल × ऊँचाई

उदाहरणम्

दशहस्तविस्तारे वृत्ते यदि वेत्सि गणक पाषाणे।
अध्यर्धहस्तपिण्डे गणयित्वा घनफलं कथय।। 94।।

न्यासः व्यासः 10 पिण्डः $\frac{3}{2}$ लब्धं क्षेत्रफलम् 79 $\frac{1}{20}$ घनफलं हस्ता 118 भागाश्च $\frac{23}{40}$ अतः पाषाणफलं हस्ताः 266 भागाश्च $\frac{127}{160}$। एवं पाषाणत्र्यस्त्रादिष्वपि। इति खातव्यवहारः।

सुक्षेमा अनुवाद-हे गणितज्ञ, 10 हाथ विस्तृत व्यास वाले तथा $1\frac{1}{2}$ या $\frac{3}{2}$ ऊँचाई वाले वृत्तीय बेलनाकार प्रस्तर-पिण्ड का घनफल गणना करके बताओ।

अनुशीलन-यहाँ पूर्वोक्त वृत्त के क्षेत्रफल के सूत्र-

$\Rightarrow 3.162 \times \frac{\text{व्यास}^2}{4}$ के अनुसार इस पिण्ड के आधार का क्षेत्रफल-

$$3.162 \times \frac{100}{4} = 79\frac{1}{20} \text{ या } \frac{1581}{20}$$

पूर्वोक्त सूत्रानुसार इसका घनफल-

$$\frac{1581 \times \frac{3}{2}}{20} = \frac{4743}{40} = 118\frac{23}{40} \text{ घन हस्त}$$

पूर्वोक्तानुसार इसका पाषाणफलहस्त–

$\frac{4743 \times \frac{9}{2}}{40} = \frac{42687}{160} = 266\frac{127}{160}$ पाषाण फलहस्त

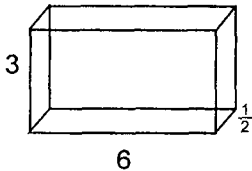
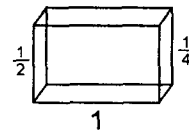
चितौ सूत्रम्

चयने क्षेत्रस्य फलं समुच्छ्रयेणाहतं चितेर्भवति।
गणितं तदिष्टकायाः फलेन हृतमिष्टकासंख्या।। 58।।

सुक्षेमा अनुवाद-चिति के क्षेत्रफल को उसके समुच्छ्रय या ऊँचाई से गुणा करने पर चिति का घनफल होता है। इस घनफल को इष्टका के घनफल से विभाजित करने पर ईटों की संख्या ज्ञात होती है।

उदाहरणम्

चतुरस्त्रायतवेदी चितेष्टकाभिः षडंगुलोन्नतिभिः।
हस्तार्धविस्तराभिः करदैर्घ्याभिर्भवेत् तस्याः।। 95।।

विस्तारे हस्तत्रयमायामे षट् समुच्छ्रये त्वर्धम्।
किं घनगणितं विद्वन् प्रकथय का चेष्टका संख्या।। 96।।

लब्धं वेदीघनहस्ताः 9। इष्टकानां घनफलम् $\frac{1}{8}$ इष्टकासंख्या 72। एवं वृत्त-त्र्यस्त्रादिचयनेष्वपि घनफलमिष्टकाश्च साधयेत्।

सुक्षेमा अनुवाद-कोई चतुष्कोण आयत वेदि जो 1 हाथ लम्बी 6 अंगुल ऊँची या $\frac{6}{24}$ अर्थात् $\frac{1}{4}$ हाथ ऊँची तथा $\frac{1}{2}$ हाथ चौड़ी ईटों से चुनी गई है तथा जो चौड़ाई में 3 हाथ, लम्बाई में 6 तथा ऊँचाई में $\frac{1}{2}$ हाथ है, उस वेदि का घनफल तथा उसकी ईटों की संख्या क्या होगी।

अनुशीलन-यहाँ घनाभ के आयतन के सूत्र ⇒ लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई के अनुसार वेदि का घनफल–

$3 \times 6 \times \frac{1}{2} = \frac{18}{2} = 9$ हस्त^3

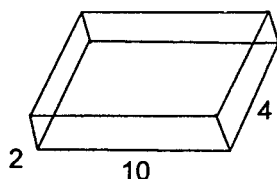
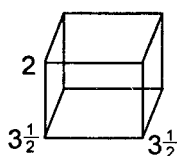
इसी सूत्र के अनुसार ईटों का घनफल–

$1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \quad = \quad \frac{1}{8}$ हस्त^3

ईटों की संख्या–

$9 \div \frac{1}{8}$ या $9 \times 8 \quad = \quad 72$ ईटें।

उदाहरणम्

कुण्डे द्विहस्तविस्तरदशकरदैर्घ्ये चतुष्करोच्छ्राये।
वित्तं प्रदीयते किं कर्मकराणां सखे तत्र।। 97।।
हस्तद्वयविस्तारं दलयुतहस्तत्रयायतं कुण्डम्।
सार्धं त्रिकरोच्छ्रायं क्रियते चैकेन रूपेण।। 98।।

अथ त्रैराशिकम्

यद्येतावन्तो $24\frac{1}{2}$ हस्ता रूपेण क्रियन्ते तदैतावन्तो 80 हस्ताः कियद्भिः क्रियन्त इति लब्धं रूपाणि 3, भागाश्च $\frac{13}{49}$।। इति चितिव्यवहारः।

सुक्षेमा अनुवाद-हे मित्र, 2 हाथ चौड़े, 10 हाथ लम्बे तथा 4 हाथ ऊँचे कुण्ड को बनाने के लिये कारीगरों को कितनी मजदूरी देनी होगी, यदि 2 हाथ चौड़े, $3\frac{1}{2}$ या $\frac{7}{2}$ हाथ लम्बे तथा $\frac{7}{2}$ हाथ ऊँचे कुण्ड के लिये 1 रूप मजदूरी दी जाती है।

अनुशीलन-इसके लिये पहले दोनों प्रकार के कुण्डों के घन हस्त प्राप्त करते हैं–

$2 \times 10 \times 4 \quad = \quad 80$ घन हस्त का प्रथम कुण्ड।

$2 \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \quad = \quad 24\frac{1}{2}$ घन हस्त का दूसरा कुण्ड।

अब पूर्वोक्त त्रैराशिक या ऐकिक नियम के अनुसार–

यदि $24\frac{1}{2}$ हस्त^3 के कुण्ड की मजदूरी $\quad$ 1 रूप

तो 1 हस्त^3 ,, ,, ,, ,, $\quad 1 \times \frac{2}{49}$ रूप

तो 80 हस्त^3 ,, ,, ,, ,, $\quad 80 \times \frac{2}{49} = 3\frac{13}{49}$ रूप

काष्ठव्यवहारे सूत्रम्

पिण्डायामांगुलवधराशौ काष्ठस्य मार्गसंगुणिते।
द्विगुणद्वादशवर्गेणोर्ध्वच्छेदे फलं भक्ते।। 59।।

क्रकचक्षेत्रस्य फलं मार्गाहतमंगुलात्मकं विभजेत्।
षड्गुणचतुष्ककृत्या तिर्यक् छेदे फलं हस्ताः।। 60।।

सुक्षेमा अनुवाद-कोई काष्ठ पिण्ड, जिसका अंगुल में वर्गफल प्राप्त किया गया है, उस फल को दारण मार्ग की संख्या से संगुणित करके 12 के द्विगुणित अर्थात् 24 के वर्ग अर्थात् 576 से विभाजित करने पर सम्पूर्ण काष्ठपिण्ड का हस्त में वर्गफल प्राप्त होता है।

एक क्रकच या चीरी हुई लकड़ी के क्षेत्रफल को दारण मार्ग से संगुणित करने से अंगुलात्मक वर्गफल निकलता है। उसे $6 \times 4 = 24$ के वर्ग अर्थात् 576 से विभाजित करने से सम्पूर्ण का हस्त में वर्गफल प्राप्त होता है।

अनुशीलन-इन श्लोकों में चीरी हुई लकड़ी के क्षेत्रफल का निरूपण किया गया है। किसी लकड़ी को चीर कर समान लम्बाई चौड़ाई के अनेक पटरे प्राप्त किये जा सकते हैं। ऐसे किसी पटरे की अंगुल में लम्बाई तथा चौड़ाई प्राप्त करके उन दोनों को गुणित करने से अंगुल में क्षेत्रफल या वर्ग अंगुल प्राप्त होगा। इस क्षेत्रफल को समान पटरों की कुल संख्या से गुणित करने पर सभी पटरों का वर्ग अंगुल प्राप्त होगा।

प्राचीन गणित में 24 अंगुल का एक हस्त माना गया है। अतः $24^2 = 576$ वर्ग अंगुल एक वर्ग हस्त के बराबर है। अतः सभी पटरों के वर्ग अंगुल में प्राप्त क्षेत्रफल को 576 से विभाजित करने पर उन सभी पटरों का वर्ग हस्त में क्षेत्रफल प्राप्त हो जावेगा।

उदाहरणम्

द्वादशहस्तायामे खादिरकाष्ठे करार्धदलपिण्डे।
मार्गेषु पञ्चसु भवेदूर्ध्वच्छेदे कियद् गणितम्।। 99।।

न्यासः

आयामः 12। पिण्डः $\frac{1}{4}$ लब्धं काष्ठगणितं हस्ताः 15

सुक्षेमा अनुवाद-ऐसी खैर की लकड़ी, जिससे 12 हाथ लम्बे तथा $\frac{1}{2}$ का आधा अर्थात् $\frac{1}{4}$ हाथ चौड़े पटरे बनते हैं, इस लकड़ी को ऊपर से चीर कर इस परिमाण के 5 पटरे तैयार किये गए हैं। इनका गणित या कुल क्षेत्रफल क्या होगा।

अनुशीलन-इसके प्रत्येक पटरे का क्षेत्रफल–

$12 \times \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = 3$ वर्ग हस्त का एक पटरा

$3 \times 5 = 15$ वर्ग हस्त के 5 पटरे

पिण्डेनैको हस्तः प्रपद्यते करशतं तु दैर्घ्येण।
षड्भिः खादिरदारोः पञ्च त्रिगुणाः कराः कियता।। 100।।

100

1 मार्गः 1। क्रकच गणितम् 100

अधुना त्रैराशिकम्

यदि खादिरकाष्ठहस्तशतं रूपैः षड्भिः प्रपद्यते तर्हि पञ्चदश कराः कियता प्रपद्यन्ते 100। 6। 15। लब्धं रूपभागाः $\frac{9}{10}$

सुक्षेमा अनुवाद-किसी चिरी हुई लकड़ी के पटरे की चौड़ाई 1 हाथ तथा लम्बाई 100 हाथ है, तो इसका क्षेत्रफल क्या होगा।

ऐसे 100 वर्ग हस्त की लकड़ी के पटरे का मूल्य 6 रूप है तो 15 वर्ग हस्त का पटरा कितने मूल्य में प्राप्त होगा।

अनुशीलन-पटरे का क्षेत्रफल = $1 \times 100 = 100$ वर्ग हस्त मूल्य प्राप्त करने के लिये ऐकिक नियम–

100 वर्ग हस्त काष्ठ का मूल्य 6 रूप

1 ,, ,, ,, ,, $\frac{6}{100}$

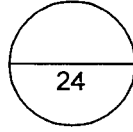
15 ,, ,, ,, ,, $\frac{6}{100} \times 15 = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$ रूप

अथवा समानुपात के नियम से समीकरण द्वारा–

$$100 : 6 :: 15 : x$$
$$100x = 15 \times 6$$
$$x = \frac{15}{100} \times 6 = \frac{9}{10}$$

पुनरुदाहरणम्

वृत्तस्य खदिरदारोः करविस्तारस्य दशसु मार्गेषु।
तिर्यक्छेदे गणितं करात्मकं किं भवेत् कथय।। 101।।

न्यासः

मार्गाः 10 अत्र व्यासार्धवर्गवर्गादित्यादिना दशशतगुणनादिकर्मणा लब्धं क्षेत्रफलम् $455\frac{9}{25}$ एतन्मार्गगुणं षड्गुणचतुष्ककृत्या विभज्य लब्धं हस्ताः $7\frac{163}{180}$ पूर्ववदनुपातेन करपत्रैकस्य च पाटने रूपभागाः $\frac{1423}{3000}$ एवमन्यकाष्ठेष्वपि। इति काष्ठव्यवहारः।

सुक्षेमा अनुवाद-कोई वृत्ताकार खैर की लकड़ी, जिसका व्यास 1 हाथ या 24 अंगुल है तथा जिसे 10 मार्ग में चीरा गया है, उसका क्षेत्रफल तथा सभी पटरों का वर्ग हस्त में गणित या क्षेत्रफल क्या होगा।

अनुशीलन-यहाँ पूर्वोक्त श्लोक 45 द्वारा वृत्त के क्षेत्रफल का मूल सूत्र-

$$\sqrt{10\left(\frac{\text{व्यास}}{2}\right)^4}$$

$$\sqrt{10\left(\frac{24}{2}\right)^4} \Rightarrow \sqrt{10 \times (12)^4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{207360} \quad \Rightarrow 455\frac{36}{100}$$

$\Rightarrow 455\frac{9}{25}$ वर्ग अंगुल लकड़ी का क्षेत्रफल

उक्त क्षेत्रफल वाले 10 पटरे प्राप्त किये गए हैं। अतः सभी पटरों का कुल क्षेत्रफल–

$$\frac{11384 \times 10}{25} = \frac{113840}{25} \text{ वर्ग अंगुल}$$

इसका वर्ग हस्त प्राप्त करने के लिए $24 \times 24 = 576$ से भाग–

$$\frac{113840}{25 \times 576} = \frac{113840}{14400} = 7\frac{1304}{1440} \div \frac{8}{8} = 7\frac{163}{180}$$

$7\frac{163}{180}$ सभी पटरों का कुल वर्ग हस्त में क्षेत्रफल

राशिव्यवहारे सूत्रम्

समभुवि विकीर्णराशेः परिधिषडंशस्य यो भवेद् वर्गः।
सोऽभ्युदयहतो गणितं घनहस्तेऽवस्थितिः खार्याः।। 61।।

मगधायामन्यत्र तु यावन्मात्रस्य घनकरो भवति।
यद्यस्यावस्थानं तावन्मात्रस्य निर्देशः।। 62।।

सुक्षेमा अनुवाद-समपृष्ठ वाली जमीन पर फैलाई गई धान्य की राशि की परिधि के छठे अंश का जो वर्ग हो, उसे अभ्युदय अर्थात् ऊँचाई से गुणित करने पर घनहस्त प्राप्त होते हैं। मगध देश मे यह घन हस्त खारी का मान होता है। अन्य देशों में जितने घन हस्त हों, उतने 'घन हस्त' के ही रूप में निर्देश होता है। यदि वे खारी के मान के अनुरूप हों तो तदनुरूप, अन्यथा उससे भिन्न भी हो सकता है।

अनुशीलन-इन श्लोकों में समतल धरती पर पड़े हुए धान के ढेर का मान जानने का प्रकार बताया गया है। इस प्रकार का ढेर लगभग शंकु का आकार धारण कर लेता है। अर्थात् सबसे ऊँचाई पर सूची सदृश सबसे कम, उसके पश्चात् वृत्त में उसका क्षेत्रफल बढ़ता जाता है। ऐसी सूची की आकृति होने से इस प्रकार के वृत्त के आयतन को 'सूचीघनफल' कहने की परम्परा है। इसे जानने के लिये शंकु के घनफल या आयतन के सूत्र का उपयोग किया गया है। प्रस्तुत धान के ढेर के घनफल का यह सूत्र शंकु के आयतन के सूत्र को उपलब्ध कराता है-

$$\text{शंकु का घनफल या आयतन} = \left(\frac{\text{परिधि}}{6}\right)^2 \times \text{ऊँचाई}$$

यह सूत्र $\pi = 3$ तथा इस प्रकार परिधि $= 3 \times$ व्यास मानकर विकसित है। इस स्थिति में इस सूत्र से क्रमशः यह परिणाम प्राप्त करते हैं-

$$\text{शंकु का आयतन} = \left(\frac{\text{परिधि}}{6}\right)^2 \times \text{ऊँचाई}$$

$$\frac{\text{परिधि}^2}{36} \times \text{ऊँचाई} = \frac{\text{परिधि} \times 3\ \text{व्यास}}{36} \times \text{ऊँचाई} = \frac{\text{परिधि} \times \text{व्यास}}{3 \times 4} \times \text{ऊँचाई}$$

क्योंकि श्लोक 45 के सूत्र से यह परिणाम प्राप्त है कि वृत्त का क्षेत्रफल= $\frac{\text{परिधि} \times \text{व्यास}}{4}$ अतः सिद्ध है कि-

शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}$ × वृत्त का क्षेत्रफल × ऊँचाई।

स्पष्टत: यह आधुनिक सूत्र के समतुल्य है। श्लोक 57 में लम्ब वृत्तीय बेलन आकार का आयतन = वृत्त का क्षेत्रफल × ऊँचाई यह सूत्र प्रदान किया है। उसका अनुसरण करने पर–

शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}$ × लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन

भास्कराचार्य ने इसी रीति से इस सूत्र का उपयोग किया है। उन्होंने पहले उपरिलिखित वृत्त का क्षेत्रफल प्राप्त किया। (वृत्तक्षेत्रे परिधिगुणित-व्यासपाद: फलं तत् - लीलावती-क्षेत्रव्यवहार श्लोक 41)। पुन: उस क्षेत्रफल को ऊँचाई से गुणन करके वृत्तीय बेलन का घनफल या आयतन प्राप्त किया है। (क्षेत्रफलं सममेवं वेध हतं घनफलं स्पष्टम् - लीलावती, खातव्यवहार, श्लोक 2)। इस घनफल को $\frac{1}{3}$ से गुणा करके सूचीखात का घनफल या शंकु का आयतन बताया है। (समखातफल-त्र्यंश: सूचीखाते फलं भवति। (लीलावती, खातव्यवहार श्लोक 3)

श्रीधराचार्य ने प्रस्तुत प्रसंग में सीधे शंकु का आयतन ज्ञात किया है। उपरिलिखित विवरण से प्रकट है कि यह वृत्त के क्षेत्रफल, वृत्तीय बेलन के आयतन के क्रम से इन सूत्रों को प्राप्त करना सम्भव है।

उदाहरणम्

षट्त्रिंशत् परिधाने राशौ धान्यस्य किं भवेद् गणितम्।
हस्तचतुष्काभ्युदये यदि वेत्सि तदुच्यतामाशु।। 102।।

न्यास:

इदं लब्धं घनहस्ता: 144। एतावत्य एव मागधा: खार्य:।।

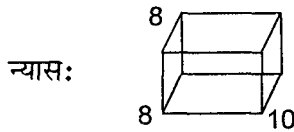
सुक्षेमा अनुवाद-कोई ऐसा धान का ढेर जिसकी परिधान या परिधि 36 हाथ तथा अभ्युदय या ऊँचाई 4 हाथ है। उसका गणित या घन हस्त कितना होगा, यदि जानते हो तो शीघ्र बताओ।

अनुशीलन-यह ढेर शंकु के आकार का है। अत: शंकु के पूर्वोक्त सूत्र को समन्वित करने पर–

$(\frac{36}{6})^2 \times 4 = 6 \times 6 \times 4 = 144$ घन हस्त या मागध खारी

अन्यदुदाहरणम्

अपवरको धान्यभृतः समाष्टकरबाहुको दशोच्छ्रायः।
का तत्र धान्य-संख्या वदतु भवान् यदि विजानाति।। 103।।

न्यासः

लब्धं गणितं हस्ताः 640। एतावत्य एव मागधा खार्यः।

सुक्षेमा अनुवाद-कोई धान का कुठार, जिसकी लम्बाई तथा चौड़ाई 8-8 हाथ तथा ऊँचाई 10 हाथ है, वह कितने घन हस्त होगा तथा उसमें कितने मागध खारी धान्य समाएगा। यदि जान सको तो बताओ।

अनुशीलन-यहाँ समतल पृष्ठ में चतुष्कोण कुठार के घनफल का उदाहरण दिया गया है। इसके सूत्र को 57 श्लोक तथा अग्रिम सूत्र में भी बताया गया है। इसके अनुसार--

$8 \times 8 \times 10 = 640$ घन हस्त अथवा 640 मागध खारी

अन्यत्र सूत्रम्

प्राग्वत् क्षेत्रस्य फलं चतुरस्त्रत्र्यस्त्रचापवृत्तेषु।
तुल्योदयेन गुणितं संख्यानं भवति धान्यस्य।। 63।।

एव त्र्यस्त्रादिस्थानेष्वपि घनफलाद् धान्यसंख्यानं कथयेत्।

सुक्षेमा अनुवाद-चतुरस्त्र या त्र्यस्त्र अर्थात् चतुर्भुज या त्रिभुज तथा चाप वाले वृत्त के क्षेत्रफल को पहले ही बता दिया गया है। इस क्षेत्रफल को उदय या ऊँचाई से गुणित करने पर इनका घनफल या आयतन तथा इस प्रकार खारी धान्य की गणना प्राप्त होती है।

अनुशीलन-यह सूत्र तथा इसका उदाहरण पिछले श्लोक में वर्णित कर दिया गया है।

भित्याश्चितादिराशिज्ञानाय सूत्रम्

द्विचतुःसत्र्यशहस्ते भित्यन्तरबाह्यकोणगतपरिधौ।
प्राग्वत् फलं भवेत् तत् स्वगुणहृतं जायते गणितम्।। 64।।

सुक्षेमा अनुवाद-कमरे की दीवाल के भीतर या भीतर के किसी कोने में

अथवा बाहर के कोने में लगे हुए धान के ढेर की परिधि को क्रमशः 2, 4 तथा $\frac{4}{3}$ से गुणित करके पूर्वोक्त संक्रिया करने के पश्चात् अपने-अपने गुणक से विभाजित करने से उनका गणित या घनहस्त प्राप्त होता है।

अनुशीलन-यदि धान का ढेर कमरे की दीवाल के किनारे है तो वह बनने वाले वृत्त का $\frac{1}{2}$ स्थान घेरता है। दो दीवालों के अन्दर के कोने में रखा ढेर वृत्त का $\frac{1}{4}$ तथा बाहर के कोने में रखे होने पर वह $\frac{3}{4}$ स्थान घेरता है। इस प्रकार वृत्त के $\frac{1}{2}$ स्थान घेरने से बनने वाली परिधि की पूर्ण परिधि उससे $\frac{2}{1}$ गुणित होगी। अत एव इनमें उन-उन से गुणित करके पहले पूर्ण परिधि प्राप्त कर ली गई है। पुनः उससे घनफल की पूर्वोक्त संक्रिया करके उस अंश वाले क्षेत्रफल का घनफल प्राप्त करने के लिये उससे भाग दिया गया है।

उदाहरणम्

भित्याश्चितस्य राशेस्त्रिषट्कपरिधेश्चतुष्कराभ्युदये।
का भवति धान्यसंख्या गणयित्वा कथ्यतामाशु।। 104।।

न्यासः

लब्धं गणितं हस्ताः 72। एतावत्यो मागधा खार्यः 72।।

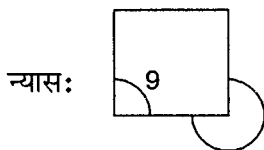
सुक्षेमा अनुवाद-किसी दीवाल के किनारे पड़ा हुआ धान का ढेर, जिसकी परिधि 3×6 अर्थात् 18 हस्त उपलब्ध है तथा ऊँचाई 4 हाथ है। वहाँ कितना घन हस्त या कितने मागध खारी धान होगा, गिनकर बताओ।

परिशीलन-यहाँ सम्पूर्ण वृत्त के $\frac{1}{2}$ परिधि बताई गई है। अतः पूर्वोक्तानुसार सम्पूर्ण संक्रियाएँ करने पर-

$$\frac{1}{2}\left(\frac{18 \times 2}{6}\right)^2 \times 4 = \frac{1}{2} \times 36 \times 4 = \frac{144}{2} = 72$$ घनहस्त या 72 मागध खारी

अन्यदुदाहरणम्

अपवरकमध्यकोणे राशेर्धान्यस्य नवकरे परिधौ।
चतुरुदये च फलं किं त्रिनवकपरिधौ बहिः कोणे।। 105।।

न्यासः

लब्धं घनहस्ता मागधाः खार्यः 36

द्वितीये घनहस्ताः 108 एतावत्यो मागधा खार्यः। इति राशिव्यवहारः।

सुक्षेमा अनुवाद-किन्हीं दो दीवालों के मध्य के कोण में रखे हुए धान के ढेर जिसकी परिधि 9 हाथ तथा ऊँचाई 4 हाथ है, उसका फल क्या होगा तथा दो दीवालों के बाहर के कोने में रखे धान की $9 \times 3 = 27$ हाथ परिधि तथा उतनी ही 4 हस्त ऊँचाई में उसका घन हस्त या मागध खारी क्या होगी।

अनुशीलन-अन्दर की दीवाल के कोण में रखा हुआ धान बनने वाले वृत्त का $\frac{1}{4}$ है। अतः उसे 4 से गुणित करके पूर्ण 1 परिधि प्राप्त करते हुए पूर्वोक्त संक्रिया करते हैं-

$$\tfrac{1}{4}\left(\frac{9 \times 4}{6}\right)^2 \times 4 = \tfrac{1}{4} \times 36 \times 4 = \frac{144}{4} = 36$$ घनहस्त या मागध खारी

इसी प्रकार अगले उदाहरण में-

$$\tfrac{3}{4}\left(\frac{27 \times 4}{6 \times 3}\right)^2 \times 4 = \tfrac{3}{4} \times 36 \times 4 = \frac{432}{4} = 108$$ घन हस्त या मागध खारी

छायाव्यवहारे करणसूत्रम्

द्विगुणसशंकुच्छायाभक्ते शंकौ भवेद् द्युगतशेषम्।
छाया तं शंकुहीने दिनगतशेषे हृते च शंकुदले।। 65।।

सुक्षेमा अनुवाद-शंकु या किसी सीधी डण्डी के दैर्घ्य सहित छाया को द्विगुणित करके उससे शंकु के दैर्घ्य को विभक्त करने पर दिन का कितना भाग बीत गया तथा कितना शेष रह गया, यह ज्ञात होता है।

साथ ही शंकु के दैर्घ्य से दिनगत शेष को विभाजित करके उसमें से शंकु के द्विगुणित को हीन करके या घटा कर प्राप्त राशि को शंकु के दल अर्थात् 2 संख्या से विभाजित करने पर छाया का मान ज्ञात होता है।

अनुशीलन-यहाँ समतल भूमि पर किसी सीधी खड़े काष्ठ की छाया से दिन मान जानने का प्रयास किया गया है। यहाँ ठीक मध्याह्न में शून्य छाया मानी गई है। उसके पश्चात् किसी भी विशेष समय में निर्मित छाया के परिज्ञान के आधार पर इस श्लोक के सूत्र के द्वारा प्रत्येक छाया के दिन मान को निर्धारित

किया गया है। यह सूत्र इस प्रकार है–

$$\text{दिन मान} = \frac{\text{शंकु का दैर्घ्य}}{2\,(\text{शंकु का दैर्घ्य} + \text{उससे निर्मित छाया})}$$

श्लोक के द्वितीय चरण में कहा गया है कि इससे विपरीत क्रिया से दिन मान ज्ञात होने पर उसके आधार पर काष्ठ की छाया जानी जा सकती है। इससे यह सूत्र प्राप्त होता है–

$$\text{छाया का मान} = \frac{\left(\dfrac{\text{शंकु का दैर्घ्य}}{\text{दिन–शेष–मान}}\right) -- 2\ \text{शंकु का दैर्घ्य}}{2}$$

पूर्वार्धोदाहरणम्

द्वादशांगुलदैर्घ्यस्य शंकोरष्टांगुलस्य वा।
छाया पश्चिमतो दृष्टा त्रिगुणाह्नः कियद् गतम्।। 106।।

12। 8 शंकोश्छाया यथाक्रमम् 36। 24। लब्धं दिनगतशेषम् $\frac{1}{8}$। पूर्वापरछायामेवं दिनसिद्धिः।।

सुक्षेमा अनुवाद-12 अंगुल या 8 अंगुल ऊँचे शंकु या सम ऊर्ध्व स्थित काष्ठ की तिगुनी छाया पश्चिम की ओर पड़ रही है। तो बताओ कितना दिन बीत गया।

अनुशीलन-यहाँ पूर्वोक्त सूत्रानुसार–

$$\frac{12}{2(12+36)} = \frac{12}{96} = \frac{1}{8}, \quad \frac{8}{2(8+24)}\ \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$$

छाया पश्चिम की ओर पड़ने से स्पष्ट है कि प्रातः काल का समय है। यहाँ सूत्रानुसार $\frac{1}{8}$ दिन बीतने का अर्थ $1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ दिन शेष है। यदि सूर्योदय प्रातः 6 बजे तथा सूर्यास्त सायं 6 बजे हो तथा इस प्रकार 12 घण्टे का दिन हो तो शेष दिन $=12 \times \frac{7}{8} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$ घण्टा है। अर्थात् प्रातःकाल 7.30 का समय है।

उत्तरार्धोदाहरणम्

अष्टभागदिनस्यैते शेषे चापि निगद्यताम्।
शंकोः पूर्वोक्तयोरेव छायां पूर्वापरां वद।। 107।।

शंकु 12। 8 दिनगतशेषे $\frac{1}{8}$ छाया यथाक्रमं लब्धा 36। 24। अत्र छाया ग्राह्या याम्योत्तररेखायाः शंकोश्चान्तरे पूर्वापरा सैव छाया कल्प्या। इति छायाव्यवहारः।

इति श्रीधराचार्यकृता त्रिशतिका पाटी समाप्ता।

सुक्षेमा अनुवाद-शंकु की पूर्वोक्त स्थिति में अर्थात् 12 अंगुल या 8 अंगुल ऊँचा स्थित होने पर तथा $\frac{1}{8}$ दिन के शेष रहने की दशा में कितनी बड़ी छाया बनेगी, बताओ।

अनुशीलन-65 वें श्लोक के द्वितीय चरण में कहा है कि पूर्वोक्त से विपरीत क्रिया करने पर छाया का मान प्राप्त होता है। अतः पूर्वोक्तानुसार–

$$\frac{(8 \times 12) - (12 \times 2)}{2} = \frac{96 - 24}{2} \quad \frac{72}{2} = 36$$ अंगुल की लम्बाई

तथा–

$$\frac{(8 \times 8) - (8 \times 2)}{2} = \frac{64 - 16}{2} = \frac{48}{2} = 24$$ अंगुल की लम्बाई

इसकी उपपत्ति को बीजगणितीय समीकरण की संक्रिया से आसानी से स्पष्ट किया जा सकता है–

$$\frac{12}{2(12 + x)} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{2(12 + x)}{12} = 8$$

$$\Rightarrow 24 + 2x = 12 \times 8 = 96$$

$$\Rightarrow 2x = 96 - 24 = 72$$

$$\Rightarrow x = \frac{72}{2} = 36$$

भारत में प्राचीन काल से धूप-घड़ी का प्रयोग होता रहा है। इसके लिये किसी समतल भूभाग पर याम्योत्तर अर्थात् दक्षिण से उत्तर एक सीधी रेखा खींची जाती थी। उसके केन्द्र-बिन्दु के आधार पर एक वृत्त की रचना की जाती थी। इस रेखा पर किसी त्रिभुजाकार काष्ठ या धातु की पत्ती को खड़ा करके दृढ़ता से स्थापित कर दिया जाता था। जिसका एक कोण स्थानीय अक्षांश के तुल्य होता था। इससे मध्याह्न में सूर्य की छाया ठीक याम्योत्तर रेखा पर पड़ती थी। इस समय दिन के १२ बजते थे। इसके पश्चात् प्रस्तुत गणितीय नियम के अनुसार छाया बढ़ने पर दिन के घण्टे बीतते जाते थे। इसके अनुसार छाया के उस२ स्थान पर उस २ घण्टे का चिह्न अंकित कर दिया जाता था। इस प्रकार काष्ठ के ऊपरी छोर की छाया जिस अंकित घण्टे पर पड़ती थी, वही दृष्ट समय माना जाता था।

श्रीधराचार्य विरचित त्रिशतिका पाटी की 'सुक्षेमा' व्याख्या समाप्त।

परिशिष्ट नं.1

त्रिशतिका के विशिष्ट गणितीय शब्द

आयत (rectangle)—

प्राचीन प्रयोग- 'आयत चतुरस्र' (ऐ. ब्रा. 5.5)

इस अर्थ में केवल 'आयत' का प्रयोग–

समचतुरस्रायतयोर्भुजकोटिहतिः प्रजायते गणितम्-त्रिशतिका सू. 42 पृ. 110

स्पष्टतः यहाँ 'आयत' शब्द समचतुरस्र का विपरीत 'विषम चतुर्भुज' का वाचक है। इस प्रकार जिस चतुर्भुज की आसन्न भुजाएँ नहीं, अपतु आमने सामने की भुजाँ बराबर हों, वह आयत है।

समश्रुतौ तुल्यचतुर्भुजे च तथायते तद् भुजकोटिघातः–लीलावती पृ. 225

आयाम = लम्बाई (length)

प्राग्वंशः षोडशप्रक्रमायामः बौ. शु. सू. 1.88

–त्रिशतिका - उदा. 83 इत्यादि, पृ. 121

इच्छा– त्रैराशिक की तृतीय राशि (Third quantity of त्रैराशिक - scale)

त्रैराशिक-फल-राशिं तमथेच्छाराशिना हतं कृत्वा।

लब्धं प्रमाणभजितं तस्मादिच्छाफलमिदं स्यात् - आर्यभटीय 1.26

त्रिशतिका सू. 29 पृ. 49

प्रमाणमिच्छा च समानजातिः आद्यन्तयोस्तत् फलमन्यजातिः - लीलावती त्रैराशिक श्लोक 7 पृ. 100

एकपत्रीकरण– ब्याज का विवरण (chart of interest)

त्रिशतिका सू. 35, पृ. 84

कपाट-सन्धि– गुणन की एक विधि (A method of multiplication)

त्रिशतिका सू. 5, पृ. 13

कर्ण– (hypotenues) कर्णस्तु पार्श्वभुजः - त्रिशतिका सूत्र 50, पृ. 131

कला-सवर्णन– भिन्न संख्याओं पर संक्रियाएँ

परिकम्मं ववहारो रज्जु-रासी क्लासवन्नेय।

जावन्तावति वग्गो घनो ततह वग्गवग्गो विकप्पोत-स्थानांग सूत्र 747

त्रिशतिका सूत्र 22 पृ. 31 में भिन्न-संक्रियाओं के 6 प्रकार

कु = मुख के समानान्तर आधार भुजा (base, parallel to मुख)

त्रिशतिका सूत्र 42 पृ. 111

चतुर्भुजेऽन्यत्र समानलम्बे लम्बेन निघ्नं कुमुखैक्यखण्डम् लीलावती श्लोक 23, पृ. 225

कार्मुक (पर्याय-चाप, धनुः) = परिधि-खण्ड (arc) इसके धनुष-आकार का होने से यह नाम विकसित है।

त्रिशतिका सूत्र 47, पृ. 126

पर्याय धनुः का प्रयोग– इषुवर्गस्य षड्गुणस्य ज्यावर्गयुतस्य मूलं धनुःकाष्ठम् – तत्त्वार्थाधिगम-सूत्र भाष्य 3.71

आप्ते पदे वृतिदलात् पतिते धनुः स्यात् - लीलावती श्लोक 49, पृ. 301

कृति = वर्ग (square)

अर्थ– सदृशद्विराशिघातः- त्रिशतिका सूत्र 11, पृ. 17

सवर्णितांशवर्गश्छेदकृतिविभाजितो भवति वर्गः - ब्रा. स्फु. सि. 12.5

कोटि = लम्ब (perpendicular) त्रिशतिका सूत्र 50 पृ. 131 त्र्यस्रे चतुरस्रे वा सा कोटिः कीर्तिता तज्ज्ञैः - लीलावती क्षेत्रव्यवहार श्लोक 1 पृ. 172

क्रकचफल = चीरी हुई लकड़ी का क्षेत्रफल (area of wooden pieces)

त्रिशतिका सूत्र 60, पृ. 150

लीलावती - क्रकचव्यवहार श्लोक 3, पृ. 313

सामान्य अर्थ– दारुदारणपथ (लीलावती पृ. 312)

ख = शून्य (cipher)

त्रिशतिका सूत्र 8, पृ. 14

धनयोर्धनमृणमृणयोर्धनर्णयोरन्तरं समैक्यं खम्।। ब्रा.स्फु.सि. 18.30

खात फल = खोदे गए घनाभ गड्ढे का घनफल (the volume of a ditch) त्रिशतिका उदा. 87, पृ. 138

क्षेत्रफलं वेधगुणं खाते घनहस्तसंख्या स्यात्। लीलावती खातव्यवहार श्लोक 1, पृ. 303

घन (cube) –

ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त 12.1 में 20 परिकर्म में से एक

घनोऽसौ समत्रिराशिहति:-त्रिशतिका सूत्र 15 पृ. 21

समत्रिघातश्च घन: प्रदिष्ट:-लीलावती, अभिन्नपरिकर्माष्टक, श्लोक 11

घनमूल (Cube root)

अघनाद् भजेद् द्वितीयात् त्रिगुणने घनस्य मूलवर्गेण-आर्यभटीय 1.5

ब्रा.स्फु.सि. 12.1 में 20 परिकर्मों में से एक

त्रिशतिका सूत्र 18, पृ. 24

घनं तदाद्याद् घनमूलमेव....लीलावती, अभिन्न-परिकर्माष्टक, श्लोक 15, पृ. 33

चाप–परिधि-खण्ड की लम्बाई (arc length)

त्रिशतिका सूत्र 47, पृ. 126

विस्तार के लिये देखें– 'कार्मुक' शब्द

चिति, चितिफल = चुनी हुई ईटों का घनफल (volume of a prism)

ब्रा.स्फु.सि. 12.1 में 8 व्यवहारों में से एक चिति-व्यवहार।

त्रिशतिका सूत्र 58, पृ. 148

उ.प्र. – उच्छ्रयेण गुणितं चिते: किल क्षेत्रसम्भवफलं घनं भवेत्।।

– लीलावती, चितिव्यवहार, श्लोक 1, पृ. 310

छायाव्यवहार– छाया की लम्बाई से दिनमान।

ब्रा.स्फु.सि. 12.1 में 80 व्यवहारों में से एक।

त्रिशतिका सूत्र 65, पृ. 157

लीलावती-छायाव्यवहार श्लोक 1 से 5, पृ. 319 तथा आगे

जीवा या ज्या (chord)

पू.प्र. – वृत्ते शरोनगुणितात् व्यासच्चतुराहतात् पदं जीवा-ब्रा.स्फु.सि. 12.41

ज्या के लिये ब्रा.स्फु.सि. 12.42

त्रिशतिका सूत्र 47, पृ. 95 तथा त्रिशतिका उदा. 86, पृ. 127

----आद्योनितेन खलु तेन भजेच्चतुर्घ्नव्यासाहतं प्रथममाप्तमिह ज्यका स्यात्।

-लीलावती, क्षेत्रव्यवहार श्लोक 48, पृ. 298

तत्स्थ– गुणन की एक विधि (A method of multiplication)

त्रिशतिका-सूत्र 6, पृ. 13

त्र्यस्र– त्रिकोण त्रिभुज।

पूर्व-प्रयोग - भगवती-सूत्र में।

त्रिशतिका श्लोक 43, पृ. 115

उ.प्र. लीलावती-क्षेत्र व्यवहार श्लोक 1, पृ. 172 आदि अनेक बार

त्रैराशिक– तीन राशियों के आधार पर समानुपात (Direct proportion based on the rule of three)

त्रैराशिक-फलराशिं तमथेच्छाराशिना हतं कृत्वा। लब्धं प्रमाणभजितं तस्मादिच्छाफलमिदं स्यात्। आर्यभटीय 1.26

ब्रा.स्फु.सि. में 20 परिकर्म में से एक

त्रिशतिका सूत्र 29 में पृ. 49

लीलावती त्रैराशिक सूत्र 7, पृ. 100 तथा आगे

दैर्घ्य– लम्बाई (length)

पू.प्र. – --- अग्रतलैक्यार्धमौच्च्यदैर्घ्यगुणम् - ब्रा.स्फु.सि. 12.47

त्रिशतिका सूत्र 52, 53 आदि पृ. 137

उ.प्र. लीलावती, खात व्यवहार उदा. श्लोक 1 पृ. 303

गणित में यह शब्द विस्तार (चौड़ाई) के सापेक्ष प्रयुक्त है। यह स्थिति न्याय वैशेषिक से भिन्न है। वहाँ 'दीर्घ' शब्द 'ह्रस्व' के विरोधी के रूप में संख्यात है। दर्शन का मानना है कि इक्षु आदि में वस्तुतः 'दीर्घत्व' ही है। यदि उसमें कभी अन्य के सापेक्ष ह्रस्व का प्रयोग होता है तो वह औपचारिक तथा अवास्तविक है।

द्रष्टव्य– परिमाणं---चतुर्विधम्-अणु, महद् दीर्घ ह्रस्वं चेति--- समिदिक्षु-वंशादिष्वंजसा दीर्घेष्वपि प्रकर्षाभावमपेक्ष्य भाक्तो ह्रस्वत्वव्यवहारः -प्रशस्तपाद भा० परिमाण प्रकरण पृ. 320

प्रक्षेप (बीज या मूलधन)

प्रक्षेपयोगहृतया लब्धया प्रक्षेपका गुणा लाभाः- ब्रा.स्फु.सि 12.16

त्रिशतिका सूत्र 38, पृ. 92

उ.प्र. – प्रक्षेपका मिश्रहता विभक्ता प्रक्षेपयोगेन पृथक् फलानि-लीलावती मिश्रक-व्यवहार श्लोक 13 पृ. 126

प्रत्युत्पन्न– गुणन (multiplication)

ब्रा.स्फु.सि 12.1 में 20 परिकर्म में से एक। इसकी विधि 12.3 में।

त्रिशतिका श्लोक 6, पृ. 13

प्रभाग जाति– भिन्न संख्याओं के भाग का भाग (compound fraction)

कला-सवर्णन के 6 प्रकारों में से एक

त्रिशतिका सूत्र 23, पृ. 32

लवा लवघ्नाश्च हरा हरघ्ना भागप्रभागेषु सवर्णनं स्यात्।

-लीलावती भिन्न-परिकर्माष्टक श्लोक 2 पृ. 37

प्रमाण– त्रैराशिक की प्रथम राशि (First quantity of त्रैराशिक scale)

लब्धं प्रमाणभजितं तस्मादिच्छाफलमिदं स्यात्।। आर्यभटीय 1.26

त्रिशतिका सूत्र 29, पृ. 49

प्रमाणमिच्छा च समानजाती आद्यन्तयोस्तत् फलमन्यजातिः। -लीलावती त्रैराशिक, श्लोक 7, पृ. 100

प्रमाण-फल– त्रैराशिक की द्वितीय राशि (second quantity of त्रैराशिक scale)

आर्यभटीय - द्र. 'प्रमाण'

त्रिशतिका सूत्र 29, पृ. 49

लीलावती - द्र. 'प्रमाण'

बाहु = भुज (base)

बाहुस्त्वबधा-त्रिशतिका सूत्र 50, पृ. 131

भाग-जाति– भिन्न संख्याओं का भाग (simple fraction)

कला-सवर्णन के 6 प्रकारों में से एक

ब्रा.स्फु.सि. 20 परिकर्म में से एक

त्रिशतिका सूत्र 23, पृ. 32

लीलावती - भिन्नपरिकर्माष्टक श्लोक 1, पृ. 35

भाग-भाग-विधि–पूर्ण संख्या का भिन्न संख्या के साथ भाग।

कला-सवर्णन के 6 प्रकारों में से एक।

ब्रा.स्फु.सि के 20 परिकर्मों में से एक

त्रिशतिका सूत्र 24, पृ. 36

भाग-माता– पूर्ण तथा अपूर्ण संख्याओं के साथ भाग, योग आदि अनेक संक्रियाएँ।

कला सवर्णन के 6 प्रकारों में से एक

ब्रा.स्फु.सि. के 20 परिकर्मों में से एक

त्रिशतिका सूत्र 25, पृ. 37

भागानुबन्ध-विधि– भिन्न संख्याओं का योग (fractional increase)

कला-सवर्णन के 6 प्रकारों में से एक

ब्रा.स्फु.सि. के 20 परिकर्मों में से एक

त्रिशतिका सूत्र 18, पृ. 26

लीलावती-भिन्न परिकर्माष्टक श्लोक 2, पृ. 38

भागापवाह– भिन्न संख्याओं का व्यवकलन (fractional decrease)

कला-सवर्णन के 6 प्रकारों में से एक

ब्रा.स्फु.सि. के 20 परिकर्मों में से एक

त्रिशतिका सूत्र 19, पृ. 27

लीलावती, भिन्न-परिकर्माष्टक, श्लोक 2, पृ. 38

भाण्ड प्रतिभाण्डक– वस्तु-विनिमय-विधि (Rules for barter)

प्राग्मूल्यव्यत्यासो भाण्डप्रतिभाण्डकेऽन्यदुक्तसमम्

परिकर्माण्यष्टानां व्यवहाराणामभिहितानि- ब्रा.स्फु.सि. 12.13

20 परिकर्मों में से एक

त्रिशतिका सूत्र 32, पृ. 75

तथैव भाण्डप्रतिभाण्डकेऽपि विधिर्विपर्यस्य हरांश्च मूल्ये।

-लीलावती-पाञ्चराश्यादिक, श्लोक 10, पृ. 111

भाव्यक– कोई भी नाम जैसे क, ख (Any term like x, y)

भावितक-भावितकरूपगुणना साव्यक्तवधेष्टभाजितेष्टाप्त्योः।

-ब्रा.स्फु.सि. 18.60

त्रिशतिका सूत्र 34, पृ. 82

मिश्र (धन)– ब्याज सम्मिलित मूलधन (whole amount)

कालप्रमाणघात: परकालहृतो द्विधाऽऽद्यमिश्रवधात्। –ब्रा.स्फु.सि. 22.15

त्रिशतिका सूत्र 33, पृ. 78

प्रमाणकालेन हतं प्रमाणं विमिश्रकालेन हतं फलं च।

–लीलावती मिश्रकव्यवहार: श्लोक 11 पृ. 117

मिश्रक व्यवहार– मूलधन तथा ब्याज की विधि (Method for simple interest and principal amount)

ब्रा.स्फु.सि. 12.1 के 8 व्यवहारों में से एक

त्रिशतिका सूत्र 33, पृ. 78

लीलावती, मिश्रक व्यवहार श्लोक 11, पृ. 117 तथा आगे

मुख– आधार के समानान्तर भुजा (Top side parallel to the base)

मुखतलयुतिदल-गणितं---ब्रा.स्फु.सि. 12.45

त्रिशतिका सूत्र 42, पृ. 111 पृ. चतुर्भुजेऽन्यत्र समानलम्बे लम्बेन निघ्नं कुमुखैक्यखण्डम्- लीलावती, श्लोक 23

मूलधन (Principal amount) स्वफलयुतरूपभक्तं मूलफलैक्यं भवति मूलम्। –ब्रा.स्फु.सि. 12.14

त्रिशतिका सूत्र 34, पृ. 82

स्वयोग भक्ते च पृथक् स्थिते ते मिश्राहते मूलकलान्तरे स्त: – लीलावती, मिश्रक व्यवहार, श्लोक 11, पृ. 117

राशि-व्यवहार– धान के ढेर का घन-गणित (volume of a heap of grain)

ब्रा.स्फु.सि. 12.1 के 8 व्यवहारों में से एक

त्रिशतिका सूत्र 61 पर पृ. 153

लीलावती-राशि व्यवहार श्लोक 1 से, पृ. 314

लम्ब = शीर्षलम्ब (perpendicular)

अवलम्बक – अविषम-पार्श्वभुजगुण: कर्णो द्विगुणावलम्बकविभक्त:।

–ब्रा.स्फु.सि. 12.26

त्रिशतिका सूत्र 43, पृ. 115

चतुर्भुजेऽन्यत्र समानलम्बे लम्बेन निघ्नं कुमुखैक्यखण्डम्।

-लीलावती श्लोक 23, पृ. 225

वर्गमूल– (square-root)

भारं हरेदवर्गाद् द्विगुणेन वर्गमूलेन। वर्गाद् वर्गे शुद्धे लब्धं स्थानान्तरे मूलम्-आर्यभटीय-गणित पाद 1.4

ब्रा.स्फु.सि. 12.1 में 20 परिकर्म में से एक

त्रिशतिका सूत्र 12-13, पृ. 20

त्यक्त्वाऽन्त्याद् विषमात् कृतिं द्विगुणयेन्मूलं समे तद्धृते-लीलावती, वर्गमूलविधि श्लोक 1 पृ. 27

वल्ली-सवर्णन– संख्याओं को समान मात्रक में बनाने की विधि। त्रिशतिका सूत्र 26, पृ. 38

विषम-क्रय–

त्रिशतिका श्लोक 38, पृ. 94

लीलावती, मिश्रक व्यवहार में क्रयविक्रय सूत्र 14 पृ. 130 के अन्तर्गत

विष्कम्भ– व्यास (diameter)

विष्कम्भान्तयोः शंकू निहन्यात्-बौधायन शुल्बसूत्र 1.23

अयुतद्वय-विष्कम्भस्यासन्नो वृत्त-परिणाहः- आर्यभटीय, गणितपाद- 1.10

त्रिशतिका श्लोक उदा. 85, पृ. 124

वेध = गहराई (depth)

क्षेत्रफलं वेधगुणं समखातफलं हृतं त्रिभिः सूच्याः। -ब्रा.स्फु.सि. 12.44

त्रिशतिका श्लोक 52, 53 पृ. 137

व्यवकलित-शेष = बड़ी संख्या के संकलित में से छोटी संख्या के संकलित को घटाने का सूत्र।

त्रिशतिका, सूत्र 3 पृ. 10

व्यस्त-त्रैराशिक– तीन राशियों के आधार पर व्युत्क्रमानुपात का नियम

(Inverse proportion based on the rule of three)

ब्रा.स्फु.सि. 12.1 में 20 परिकर्मों में से एक

त्रिशतिका सूत्र 30, पृ. 57

व्यास– (diameter)

सूत्रोक्ताद् व्यासार्धाद् व्यासार्ध मण्डलस्यैतत्-आपस्तम्बीय शुल्ब परिशिष्ट

The shulva Sutras पृ. 83

व्यास व्यासार्धकृती परिधिफले व्यावहारिके त्रिगुणे- ब्रा.स्फु.सि. 12.40

त्रिशतिका सूत्र 45, पृ. 123

व्यासे भनन्दाग्निहते विभक्ते खबाण-सूर्यैः परिधिः स सूक्ष्मः।

-लीलावती क्षेत्रव्यवहार श्लोक 40 पृ. 275

शर– जीवा के मध्य बिन्दु से वृत्त के किसी बिन्दु को स्पर्श करने वाला लम्ब -बाण (arrow)

वृत्ते शरोनगुणितात् व्यासाच्चतुराहतात् पदं जीवा। -ब्रा.स्फु.सि. 12.41

त्रिशतिका सूत्र- 47, पृ. 126

ज्याव्यासयोगान्तरघातमूलं व्यासस्तदूनो दलितः शरः स्यात्।

-लीलावती क्षेत्रव्यवहार श्लोक 43, पृ. 290

समक्रय– अनुपात के आधार पर क्रय पर संक्रियाएँ।

त्रिशतिका सूत्र 38, पृ. 94

लीलावती, मिश्रकव्यवहार में क्रयविक्रय सूत्र 14, पृ. 130 के अन्तर्गत

श्रेढ़ी व्यवहार– क्रमिक संख्याओं का गणित।

ऋग्वैदिक 'श्रेणी' शब्द का प्राकृत-रूप।

ब्रा.स्फु.सि. 12.1 में 8 व्यवहारों में से एक।

त्रिशतिका सूत्र 39, पृ. 99

महावीराचार्य के गणित-सार संग्रह तथा भास्कराचार्य के लीलावती आदि में विशद वर्णन।

हर = जिस संख्या से हरण या भाग दिया जावे (denominator of a fraction)

पर्याय हार, छेद, भाजक-आदि।

त्रिशतिका सूत्र 20, पृ. 29

परिशिष्ट नं. २

त्रिशतिका की तुलनीय गणितीय संक्रियाएँ

अन्त्य-धन– (last term)

इष्टं व्येकं दलितं सपूर्वम् उत्तरगुणम्– आर्यभटीय, गणित पाद 1.19

पदमेकहीनम् उत्तरगुणितं संयुक्तमादिनान्त्यधनम्– ब्रा.स्फु.सि. 12.17

व्येकपदोत्तरघाते सादावन्त्यं धनं तदादियुतम्– त्रिशतिका सूत्र 39, पृ. 99

चयगुणितैकोनपदं सादि अन्त्यधनम्– गणितसार संग्रह, संकलित-परिकर्म, श्लोक 64

व्येकपदघ्नचयो मुखयुक् स्यादन्त्यधनम्– लीलावती, श्रेढ़ी व्यवहार श्लोक 3, पृ. 151

अवधा– चतुर्भुज या त्रिभुज में शीर्ष लम्ब से विभाजन द्वारा प्राप्त शेष एक आधार भुजा (segment of the base)

एतां कर्णयोरनयोः पृथक् वर्गाभ्यां विशोध्य शेषयोर्मूले भुजोऽवधा च– त्रिशतिका सूत्र 50 पर व्याख्या, पृ. 131

यल्लम्बलम्बाश्रितबाहुवर्गविश्लेषमूलं कथिताऽवधा सा– लीलावती, क्षेत्रव्यवहार श्लोक 25, पृ. 230

आदिधन– (first term)

आदिः पदहृतगणितं निरेकगच्छघ्नचयदलेनोनम्–त्रिशतिका सूत्र 40, पृ. 103

सर्वथा तुलनीय– प्रभवो गच्छाप्तधनं विगतैकपदार्धगुणितचयहीनम्– गणितसार संग्रह, परिकर्म श्लोक 74

अन्य प्रकार ⇒ द्विगुणितसंकलितधनं गच्छहृतं रूपरहितगच्छेन।

ताडितचयेन रहितं द्वयेन सम्भाजितं प्रभवः– गणित सार संग्रह, परिकर्म श्लोक 76

त्रिशतिका से तुल.- गच्छहृते गणिते वदनं स्यात् व्येकपदघ्नचयार्धविहीने।

-लीलावती, श्रेढ़ी व्यवहार, श्लोक 4, पृ. 152

कर्ण = अक्ष्णया रज्जु-बौधायन शुल्व सूत्र प्रोक्त शब्द। (Hypotenues)

यश्चैवं भुजावर्गः कोटीवर्गश्च कर्णवर्गः सः–आर्यभटीय, गणितपाद श्लोक 17

कोटिबाहुकृतियुतिपदं कर्णः। -ब्रा.स्फु.सि. 12.24

तत्कृत्योर्युतो मूलं प्रजायते कर्णः – त्रिशतिका सूत्र 51, पृ. 131

भुजकोट्योः कृतियुतेर्मूलं कर्णः – उसी श्लोक पर त्रिशतिका व्याख्या

तत्कृत्योर्योगपदं कर्णः – लीलावती क्षेत्रव्यवहार श्लोक 2, पृ. 172

कोटि– (perpendicular side)

भुजस्य कृतिम्। प्रोह्य पदं कोटिः ..... ब्रा.स्फु.सि. 12.24

भुजकोट्योः कृतिहीनात् पृथक् पृथक् कर्णवर्गतो मूले।

कोटिभुजौ---त्रिशतिका श्लोक 51, पृ. 131

भुजवर्गोनायाः कर्णकृतेर्मूलं कोटिः ---लीलावती, क्षेत्रव्यवहार श्लोक 2

गच्छ या पद (Number of terms)

गच्छोऽष्टोत्तरगुणितात् द्विगुणाद्युत्तरविशेषवर्गयुतात्।

मूलं द्विगुणाद्यूनं स्वोत्तरभाजितं सरूपार्धम्।। –आर्यभटीय, गणितपाद 1.20

उत्तरहीनद्विगुणादिशेषवर्गं धनोत्तराष्टवधे।

प्रक्षिप्य पदं शेषोनं द्विगुणोत्तरहृतं गच्छः।।–ब्रा.स्फु.सि. 12.18

संकलितं वा तदष्टसंगुणितम्। रूपयुतं तन्मूलं निरेकमर्धीकृतं गच्छः।।–त्रिशतिका सूत्र 2, पृ. 7

अष्टोत्तरहतफलतो द्विगुणादि-प्रचयविवरकृतियुक्तात्।

मूलं द्विगुणमुखोनं सचयं द्विचयोद्धृतं गच्छः।–त्रिशतिका श्लोक 41, पृ. 107

श्रेढ़ीफलादुत्तरलोचनघ्नाच्चयार्धवक्त्रान्तरवर्गयुक्तात्।

मूलं मुखोनं चयखण्डयुक्तं चयोद्धृतं गच्छमुदाहरन्ति।। –लीलावती, श्रेढ़ी व्यवहार, श्लोक 5, पृ. 155

गुणनफल (द्विपद का)–

ध्वनित ⇒ इष्टोनयुतवधो वा तदिष्टवर्गान्वितो वर्गः। त्रिशतिका श्लोक 11, पृ. 17

स्पष्ट सूत्र ⇒ इष्टोनयुग्राशिवधः कृतिः स्यादिष्टस्य वर्गेण समन्वितो वा– लीलावती, अभिन्न-परिकर्माष्टक, श्लोक 9, पृ. 22

अन्य गुणनफल का स्पष्ट सूत्र ⇒ ---तयोर्योगान्तराहतिः। वर्गान्तरं भवेदेवं ज्ञेयं सर्वत्र धीमता– लीलावती क्षेत्रव्यवहार, श्लोक 3, पृ. 100

गोलपाषाण-फल– गोले का आयतन (volume of the sphere)

तन्निजमूलेन हतं घनगोलफलं निरवशेषम् –आर्यभटीय, गणितपाद, 1.7

गोलव्यासघनार्धं स्वाष्टादशभागसंयुतं गणितम्।

घनहस्ता नवगुणिताश्चतुर्विभक्ता करा दृषदः।। त्रिशतिका सूत्र 56, पृ. 145

---एवं तदपि च फलं पृष्ठजं व्यासनिघ्नम्।

षड्भिर्भक्तं भवति नियतं गोलगर्भे घनाख्यम्।।-लीलावती, क्षेत्रव्यवहार, श्लोक 41, पृ. 281

घन (एक पद का) (cube)—

सदृशत्रयसंवर्गो घनः– आर्यभटीय गणित पाद 1.3

स्थाप्योऽन्त्यघनोऽन्त्यस्य कृतिस्त्रिगुणोत्तरसंगुणा च तत्प्रथमात्।

उत्तरकृतिरन्त्यगुणा त्रिगुणा चोत्तरघनश्च घनः।-ब्रा.स्फु.सि.

सर्वथा तुल. ⇒ स्थाप्योऽन्त्यघनोऽन्त्यकृतिः स्थानाधिक्यं त्रिपूर्वगुणिता च।

आद्यकृतिरन्त्यगुणिता त्रिगुणिता च घनस्तथाद्यस्य- त्रिशतिका सू. 14, पृ. 21

स्थाप्यो घनोऽन्त्यस्य ततोऽन्त्यवर्गः---आदि- लीलावती, अभिन्नपरिकर्माष्टक श्लोक 11

घन (द्विपद का) ($b = 1$ मानते हुए)–

खैकादिचयेनान्त्ये त्र्यादिहते वा युतिः सैके- त्रिशतिका सूत्र 15, पृ. 21

त्रिशतिका से विकसित तुल. सूत्र–खण्डाभ्यां वा हतो राशिस्त्रिघ्नः खण्डघनैक्ययुक्। -लीलावती, अभिन्नपरिकर्माष्टक श्लोक 13 पृ. 29

घनमूल– (Cube root)

अघनाद् भजेद् द्वितीयात् त्रिगुणेन घनस्य मूलवर्गेण।

वर्गस्त्रिपूर्वगुणितः शोध्यः प्रथमाद् घनश्च घनात्।। -आर्यभटीय, गणितपाद 1.5

तुल.--- त्रिशतिका सूत्र 16, 17 पृ. 24

---लीलावती अभिन्न परिकर्माष्टक श्लोक 15, पृ. 33

घनफल (volume)

I. **समखात का घनफल** = घन का आयतन (volume of the cube)

क्षेत्रफलं वेधगुणं समखातफलम् - ब्रा.स्फु.सि. 12.44

समविस्तरहतदैर्घ्ये वेधेन समाहते फलं भवति।

खाते समभुजवेधे बाहुघनो जायते गणितम्। –त्रिशतिका सूत्र 53 पृ. 137

क्षेत्रफलं वेधगुणं खाते घनहस्तसंख्या स्यात्--लीलावती, खातव्यवहार, श्लोक 2, पृ. 303

II. **चिति का घनफल** = घनाभ का आयतन (volume of the cuboid)

आकृतिफलमौच्च्याहतमग्रतलैक्यार्धमौच्च्यदैर्घ्यगुणम्।

घनगणितमिष्टकाघनफलेन हृतमिष्टकागणितम्।। -ब्रा.स्फु.सि. 12.47

चयने क्षेत्रस्य फलं समुच्छ्रयेणाहतं चितेर्भवति। -त्रिशतिका सूत्र 58, पृ. 148

उच्छ्रयेण गुणितं चितेः किल क्षेत्रसम्भवफलं घनं भवेत्। -लीलावती, चितिव्यवहार, श्लोक 1, पृ. 310

III. **वृत्त का घन गणित** = समवृत्तीय बेलन का आयतन (volume of right circular cylinder)

प्राग्वत् क्षेत्रस्य फलं वृत्तत्र्यस्रादिदृषदि पिण्डघ्नम्।

घनगणितमतो दृषदः फलं भवेत् पूर्वकरणेन- त्रिशतिका सूत्र 57, पृ. 147

तथा-प्राग्वत् क्षेत्रस्य फलं चतुरस्रत्र्यस्रचापवृत्तेषु।

तुल्योदयेन गुणितं संख्यानं भवति धान्यस्य- त्रिशतिका सूत्र 63, पृ. 155

क्षेत्रफलं सममेवं वेधहतं घनफलं स्पष्टम्--लीलावती, खातव्यवहार, श्लोक 3, पृ. 304

IV. **कूप का फल** = असमत खात वृत्त या अपूर्ण शंकु तथा अपूर्ण घनाभ का घनफल या आयतन (volume of frustrum of the cone and pyramid)

मुखतलयुतिदलगणितं वेधफलं व्यावहारिकं गणितम्।

मुखतलगणितैक्यार्धं वेधगुणं स्याद् गणितमौत्रम्।। ब्रा.स्फु.सि. 12.45

मुखतलतद्योगानां वर्गैक्यकृतेः पदं दशगुणायाः।

वेधगुणं चतुरन्वितविंशतिभक्तं फलं कूपे- त्रिशतिका सूत्र 54, पृ. 140

मुखजतलजतद्युतिजक्षेत्रफलैक्यं हृतं षड्भिः।

क्षेत्रफलं सममेवं वेधहतं घनफलं स्पष्टम्- लीलावती, खातव्यवहार, श्लोक 2 पृ. 304

V. **धान्यराशि का घनहस्त** = सूचीखात का घनफल या शंकु का आयतन

(volume of right circular cone)

क्षेत्रफलं वेधगुणं समखातं फलं त्रिभिः सूच्याः।–ब्रा.स्फु.सि. 12.44

समभुवि विकीर्णराशेः परिधिषडंशस्य यो भवेद् वर्गः।

सोऽभ्युदयहतो गणितं घनहस्तेऽवस्थितिः खार्याः।– त्रिशतिका सूत्र 61, पृ. 153

त्रिशतिका से तुल.–भवति परिधिषष्ठे वर्गिते वेधनिघ्ने घनगणितकराः स्युर्मागधास्ताश्च खार्यः – लीलावती, राशिव्यवहार श्लोक 15, पृ. 314

ब्रा.स्फु.सि. से तुल.⇒समखातफलत्र्यंशः सूचीखाते फलं भवति। –लीलावती, खातव्यवहार, श्लोक 3, पृ. 305

चतुरस्र = I. **वर्ग या आयत का क्षेत्रफल** (area of the square or rectangle)

वर्गः समचतुरस्रः फलं च सदृशद्वयस्य संवर्गः– आर्यभटीय गणितपाद 1.3

समचतुरस्रायतयोर्भुजकोटिहतिः प्रजायते गणितम् –त्रिशतिका सूत्र 42, पृ. 110

समश्रुतौ तुल्यचतुर्भुजे च तथाऽऽयते तद्भुजकोटिघातः। –लीलावती, क्षेत्रव्यवहार श्लोक 23, पृ. 255

II. **समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल** (Area of a trapezium)

आयामगुणे पार्श्वे तद्योगहृते स्वपातरेखे ते। विस्तरयोगार्धगुणे ज्ञेयं क्षेत्रफलमायामे। –आर्यभटीय, गणितपाद, श्लोक 8

चतुरस्रेष्वन्येषु च लम्बगुणं कुमुखयोगार्धम्। –त्रिशतिका श्लोक 42, पृ. 111

चतुर्भुजेऽन्यत्र समानलम्बे लम्बेन निघ्नं कुमुखैक्यखण्डम्। –लीलावती, क्षेत्र-व्यवहार, श्लोक 23, पृ. 225

चय, प्रचय या उत्तर (Common difference)

पदहृतफलं मुखोनं निरेकपददलहृतं प्रचयः। –त्रिशतिका सूत्र 40, पृ. 105

द्विहृतं संकलितधनं गच्छहृतं द्विगुणितादिना रहितम्

विगतैकपदविभक्तं प्रचयस्स्यादिति विजानीहि।।

–गणितसारसंग्रह-परिकर्म श्लोक 2, पृ. 75

गच्छहृतं धनमादिविहीनं व्येकपदार्धहृतं च चयः स्यात्। –लीलावती, श्रेढ़ी व्यवहार, श्लोक 4, पृ. 153

त्र्यस्त्र-फल = त्रिभुज-क्षेत्रफल

त्रिभुजस्य फलं शरीरं समदलकोटी भुजार्धसंवर्गः-आर्यभटीय, गणितपाद 1.6

(i) चतुरस्त्रे त्र्यस्त्रे वा क्षेत्रे कुदलं च लम्बहृतम्-त्रिशतिका सूत्र 43, पृ. 115

(ii) भुजयुतिदलं चतुर्धा भुजहीनं तद् वधात् पदं गणितम्-त्रिशतिका सूत्र 43, पृ. 115

I से तुल. लम्बगुणं भूम्यर्धं स्पष्टं त्रिभुजे फलं भवति-लीलावती, क्षेत्र व्यवहार, श्लोक 18

(ii) से तुल. ⇒ सर्वदोर्युतिदलं चतुःस्थितं बाहुभिर्विरहितं च तद्वधात्।

मूलमस्फुटफलं चतुर्भुजे स्पष्टमेवमुदितं त्रिबाहुके।। -लीलावती, क्षेत्रव्यवहार, श्लोक 19, पृ. 217

परिधि = वृत्त-परिणाह (आर्यभटीय) (circumference)

परिधान भी- त्रिशतिका उदा. 102, पृ. 154

चतुरधिकं शतमष्टगुणं द्वाषष्टिस्तथा सहस्त्राणाम्।

अयुतद्वय-विष्कम्भस्यासन्नो वृत्त-परिणाहः।।-आर्यभटीय, गणितपाद श्लोक 1.10

वृत्तव्यासस्य कृतेर्मूलं परिधिर्भवति दशगुणायाः। -त्रिशतिका सूत्र 45, पृ. 123

त्रिशतिका से तुल. - वृत्तक्षेत्रव्यासो दशपदगुणितो भवेत् परिक्षेपः (परिधिः) -गणितसार संग्रह, क्षेत्र गणितव्यवहार, श्लोक 60

आर्यभटीय से तुल. - द्वाविंशतिघ्ने विहृतेऽथ शैलैः स्थूलोऽथवा स्याद् व्यवहारयोग्यः।

-लीलावती, क्षेत्रव्यवहार, श्लोक 40, पृ. 276

भुज = आधार (base)

कर्णकृतेः कोटिकृतिं विशोध्य मूलं भुजः - ब्रा.स्फु.सि. 12.24

भुजकोट्योः कृतिहीनात् पृथक्-पृथक् कर्णवर्गतो मूले।

कोटिभुजौ - त्रिशतिका सूत्र 51, पृ. 131

कोटिवर्गोनायाः कर्णकृतेर्मूलं भुजः। उसी श्लोक पर त्रिशतिका व्याख्या पृ. 132

कोटिश्रुतिकृत्योरन्तरात् पदं बाहुः - लीलावती, क्षेत्रव्यवहार, श्लोक 2, पृ.

172

मध्यधन (Middle term)

आदियुतान्त्यधनार्धं मध्यधनम्- ब्रा.स्फु.सि. 12.16

अन्त्यं धनं तदादियुतम्। द्विविभक्तं मध्यधनम् - त्रिशतिका सूत्र 39, पृ.99

अन्त्यं धनं मुखयुग्दलितं तत्। मध्यधनम् - लीलावती, श्लोक 3, पृ. 151

वृत्त-क्षेत्रफल (area of the circle)

समपरिणाहस्यार्धं विष्कम्भार्धहतमेव वृत्तफलम्। -आर्यभटीय, गणितपाद 1.7

व्यासार्धवर्गवर्गात् क्षेत्रफलं दशगुणान् मूलम्। -त्रिशतिका सूत्र 45, पृ. 123

व्यासचतुर्भागगुणः परिधिः फलम्- गणितसार संग्रह, क्षेत्र गणित व्यवहार श्लोक 60

वृत्तक्षेत्रे परिधि-गुणित-व्यासपादः फलं तत्। -लीलावती, क्षेत्रव्यवहार, श्लोक 41, पृ. 281

सर्वधन या गणित (sum of terms)

आद्यन्तं पदार्धहतम्– आर्यभटीय, गणितपाद, 1. 7

मध्यधनं पदगुणं गणितम् - ब्रा.स्फु.सि. 12.17

मध्यधनं गच्छगुणं जायते गणितम्- त्रिशतिका सूत्र 39, पृ. 99

संकलित = 1 से क्रमिक संख्याओं का आपस में जोड़।

ब्रा.स्फु.सि. 12.1 में 20 परिकर्मो में से एक।

सैकपदाहतपददलमेकादिचयेन भवति संकलितम्। -त्रिशतिका सूत्र 1, पृ. 6

सैकपदघ्नपदार्धमथैकाद्यकंयुतिः किल संकलिताख्या। -लीलावती, श्रेढ़ी व्यवहार श्लोक 1, पृ. 144

संकलित से पद या गच्छ–number of terms of an A.P.

--संकलितं वा तदष्टसंगुणितम्।

रूपयुतं तन्मूलं निरेकमर्धीकृतं गच्छः।- त्रिशतिका सूत्र 2, पृ. 7

1 से विषम संख्याओं का संकलित–

रूपादिद्विचयपदसमासो वा- त्रिशतिका सूत्र 11, पृ. 17

एकादिद्विचयेच्छागच्छयुतिर्वा भवेद् वर्गः - गणितसार संग्रह, परिकर्मव्यवहार 29

परिशिष्ट नं. ३ : त्रिशतिका की तुलनीय गणितीय संक्रियाओं से प्राप्त सूत्र

यह सूची वर्णानुक्रम ने नहीं, अपतु विषयानुक्रम से है। सूत्रों के प्रमाण के लिये 'गणितीय संक्रियाओं' वाला परिशिष्ट नं. 2 देखा जावे। अंकगणित तथा बीजगणित से सम्बन्धित संक्रियाएँ–

विषय	त्रिशतिका से प्राप्त स्पष्ट सूत्र	त्रिशतिका से प्राप्त ध्वनित सूत्र	भास्कराचार्य की लीलावती	आधुनिक गणित द्वारा विकसित सूत्र
1 से क्रमिक संख्याओं 1 + 2 + 3 ---अन्तिम पद (n) तक का संकलित या योग	$s = \frac{n\ (n+1)}{2}$	$s = \frac{n^2 + n}{2}$	$s = \frac{n(n+1)}{2}$	
1 से विषम संख्याओं अर्थात् 1 + 3 + 5-- अन्तिम पद (n) तक का संकलित या योग	विषम संख्याओं का योग या S=पदों की संख्या² या n^2 अथवा $\left(\frac{\text{अन्तिम विषम संख्या} + 1}{2}\right)$			$S = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$ इस सर्वधन के सामान्य सूत्र पर समीकरण नियम से प्राप्त सूत्र
1 + 2 + 3---अन्तिम पद (n) के संकलित से पदों की संख्या	$n = \frac{\sqrt{8S+1} - 1}{2}$			1+2+3--अन्तिम पद के संकलित के सूत्र को द्विघात समीकरणका रूप देकर उस सूत्र के सामान्य नियमों से सिद्ध।
गुणनफल (द्विपद का)		$(a+b)^2 = a^2\ 2ab + b^2$ (त्रिशतिका सूत्र 10)	स्पष्ट प्रोक्त	
गुणनफल (द्विपद का)		$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (त्रिशतिका सूत्र 11)	स्पष्ट प्रोक्त	
गुणनफल (त्रिपद का)		$(a+b+C)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ (त्रिशतिका सूत्र 10 तथा 12)	स्पष्ट वर्णन	
घनफल (द्विपद का)		$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (त्रिशतिका सूत्र 14)		

श्रेढ़ी-व्यवहार (progression) से सम्बन्धित संक्रियाएँ

विषय	आर्यभट का आर्यभटीय	ब्राह्मस्फुट का ब्राह्मस्फुट सिद्धान्त	त्रिशतिका के स्पष्ट सूत्र	त्रिशतिका से ध्वनित सूत्र	भास्कराचार्य की लीलावती	आधुनिक गणित के लिये समकक्ष सूत्र
अन्त्यधन (ℓ)	$a+(n-1)d$	$a+(n-1)d$	$a+(n-1)d$		$a+(n-1)d$	
मध्यधन (m)			$\frac{a+\ell}{2}$	$\frac{2a+(n-1)d}{2}$		
सर्वधन (s)	$\frac{n(a+\ell)}{2}$		$n \times m$	$\frac{n(a+\ell)}{2}$		$\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$
आदिधन (a)			$\frac{s}{n}-\frac{(n-1)d}{2}$		$\frac{s}{n}-\frac{(n-1)d}{2}$	सर्वधन के सूत्र के आधार पर समीकरण के सामान्य नियमों से प्राप्त सूत्र
चय या प्रचय (d)			$\frac{2\left(\frac{s}{n}-a\right)}{n-1}$		$\frac{2\left(\frac{s}{n}-a\right)}{n-1}$	सर्वधन के सूत्र पर समीकरण के सामान्य नियमों से प्राप्त सूत्र
गच्छया पदों की संख्या (n)	आर्यभटीय $\frac{\frac{1}{2}\{\sqrt{(2a-d)^2+8sd}-2a}{d}+1$		त्रिशतिका का स्पष्ट सूत्र $\frac{\sqrt{(2a-d)^2+8sd}-(2a-d)}{2d}$ (त्रिशतिका श्लोक 41)		भास्कराचार्य की लीलावती $n=\frac{\sqrt{2sd+\left(a-\frac{d}{2}\right)^2}-\left(a-\frac{d}{2}\right)}{d}$	

रेखा-गणित से सम्बन्धित संक्रियाएँ

रेखागणितीय आकृतियाँ	आर्यभट का आर्यभटीय	ब्रह्मगुप्त का ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त	त्रिशतिका के स्पष्ट सूत्र	त्रिशतिका से ध्वनित सूत्र	भास्कराचार्य की लीलावती	आधुनिक गणित के लिये समकक्ष सूत्र
त्रिभुज का क्षेत्रफल	$\frac{1}{2}$ भुज × कोटि (आ.भ. 1.6)		$\frac{1}{2}$ आधार × लम्ब त्रिशतिका श्लोक 43		$\frac{\text{आधार × लम्ब}}{2}$ लीलावती क्षे.व्य.श्लो.18	$\frac{1}{2}$ b × h
,, ,, ,,		$\sqrt{S(s-a)(s-b)(s-c)}$ ब्रा.स्फु.सि. 12-21	$\sqrt{S(s-a)(s-b)(s-c)}$ त्रिशतिका श्लोक 43		$\sqrt{S(s-a)(s-b)(s-c)}$ लीलावती क्षे.व्य.श्लो.19	$\sqrt{S(s-a)(s-b)(s-c)}$
त्रिभुज का शीर्षलम्ब			$\frac{2 \times \text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$ (त्रिशतिका श्लोक 50)			$\frac{2 \times \text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$
विषमलम्ब चतुर्भज का क्षेत्रफल		$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ (ब्रा.स्फु.सि.12.21) श्लोक 12.28 से चक्रीय चतुर्भुज ध्वनित	$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ त्रिशतिका श्लोक 43 (उदा. श्लोक 80 से चक्रीय चतुर्भुज ध्वनित)		$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ लीलावती क्षे.व्य.श्लो.19 में अस्फुट या स्थूल फल	
समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल	$\left(\frac{a+b}{2}\right) \times h$ (आ.भ.1.8)		$\frac{1}{2}$ (a+b) × h त्रिशतिका श्लोक 42		$\left(\frac{a+b}{2}\right) \times h$ लीलावती क्षे.व्य.श्लो.23	$\frac{1}{2}(b_1+b_2) \times h$

रेखागणितीय आकृतियाँ	आर्यभट का आर्यभटीय	ब्रह्मगुप्त का ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त	त्रिशतिका के स्पष्ट सूत्र	त्रिशतिका से ध्वनित सूत्र	भास्कराचार्य की लीलावती	आधुनिक गणित के लिये समकक्ष सूत्र
परिधि	$\frac{62832}{20000}$ × व्यास अर्थात् 3.1416 × व्यास (आ.भ.1 10)		$\sqrt{10 \times \text{व्यास}^2}$ (त्रिशतिका श्लोक 45)	$\sqrt{10} \times$ व्यास	$\frac{3927}{1250}$ × व्यास अर्थात् ३.१४१६ × व्यास अथवा $\frac{22}{7}$ × व्यास लीलावती क्षे.व्य.श्लो.४०	π × व्यास
वृत्त का क्षेत्रफल	$\frac{\text{परिधि}}{2} \times \frac{\text{व्यास}}{2}$ (आ.भ.1.7)		$\sqrt{10\left(\frac{\text{व्यास}}{2}\right)^4}$ (त्रिशतिका श्लोक 45)	$\sqrt{10} \times \frac{\text{व्यास} \times \text{व्यास}}{4}$ या $\frac{\text{परिधि} \times \text{व्यास}}{4}$	$\frac{\text{परिधि} \times \text{व्यास}}{4}$ अथवा– $\frac{3927 \times \text{व्यास}^2}{5000}$ या $\frac{11}{14} \times \frac{\text{व्यास}^2}{4}$ (स्थूलफल) लीलावती क्षे.व्य.श्लो.42	या π× त्रिज्या^{2}
वृत्त-खण्ड का क्षेत्रफल			$\sqrt{\frac{10}{9}\left\{\frac{\text{शर (जीवा+शर)}}{2}\right\}^2}$ त्रिशतिका श्लोक 47	$\sqrt{\frac{10}{3}} \times \frac{\text{शर (जीवा+शर)}}{2}$		
समखात का घनफल या घन का आयतन		क्षेत्रफल × गहराई (ब्रा.स्फु.सि.12.44)	लम्बाई × चौड़ाई × गहराई त्रिशतिका श्लोक 53		क्षेत्रफल × गहराई लीलावती खात व्य.श्लो.1	

रेखागणितीय आकृतियाँ	आर्यभट का आर्यभटीय	ब्रह्मगुप्त का ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त	त्रिशतिका के स्पष्ट सूत्र	त्रिशतिका से ध्वनित सूत्र	भास्कराचार्य की लीलावती	आधुनिक गणित के लिये समकक्ष सूत्र
चिति का घनफल या घनाभ का आयतन		क्षेत्रफल × ऊँचाई (ब्रा.स्फु.सि.12.47)	क्षेत्रफल × ऊँचाई त्रिशतिका श्लोक 58		क्षेत्रफल × ऊँचाई लीलावती चिति व्य.श्लो.1	
वृत्त का घनगणित या समवृत्तीय बेलन का आयतन			वृत्त का क्षेत्रफल × ऊँचाई त्रिशतिका का सू.57		वृत्त का क्षेत्रफल × गहराई (लीलावती खात व्य.श्लोक3)	
गोल पाषाण का घनहस्त या गोले का आयतन			$\frac{\text{व्यास}^3}{2} + \frac{\text{व्यास}^3}{2 \times 18}$ अर्थात् $\frac{19}{36} \times \text{व्यास}^3$	$\frac{4}{3} \times ३.१६$ त्रिज्या³		$\frac{4}{3} \pi$ त्रिज्या³
सूचीखात का घनफल या शंकु का आयतन		$\frac{1}{3}$ वृत्त का क्षेत्रफल× ऊँचाई (ब्रा.स्फु.सि.12.44)	$\left(\frac{\text{परिधि}}{6}\right)^2 \times$ ऊँचाई	$\frac{1}{3} \times$ वृत्त का क्षेत्रफल× ऊँचाई	$\frac{1}{3} \times$समवृत्तीय बेलन का आयतन	
असमखात वृत्त या अपूर्ण शंकु का घनफल या आयतन			त्रिशतिका का स्पष्ट सूत्र श्लोक 54: $\frac{\text{ऊँचाई}}{24} \sqrt{10\{\text{व्यास}_1^2 + \text{व्यास}_2^2 + (\text{व्यास}_1 + \text{व्यास}_2\}^2}$		भास्कराचार्य की लीलावती: $\frac{(\text{मुखज क्षेत्रफल} + \text{तलज क्षेत्रफल} + \text{युतिज क्षेत्रफल})\text{ऊँचाई}}{6}$	